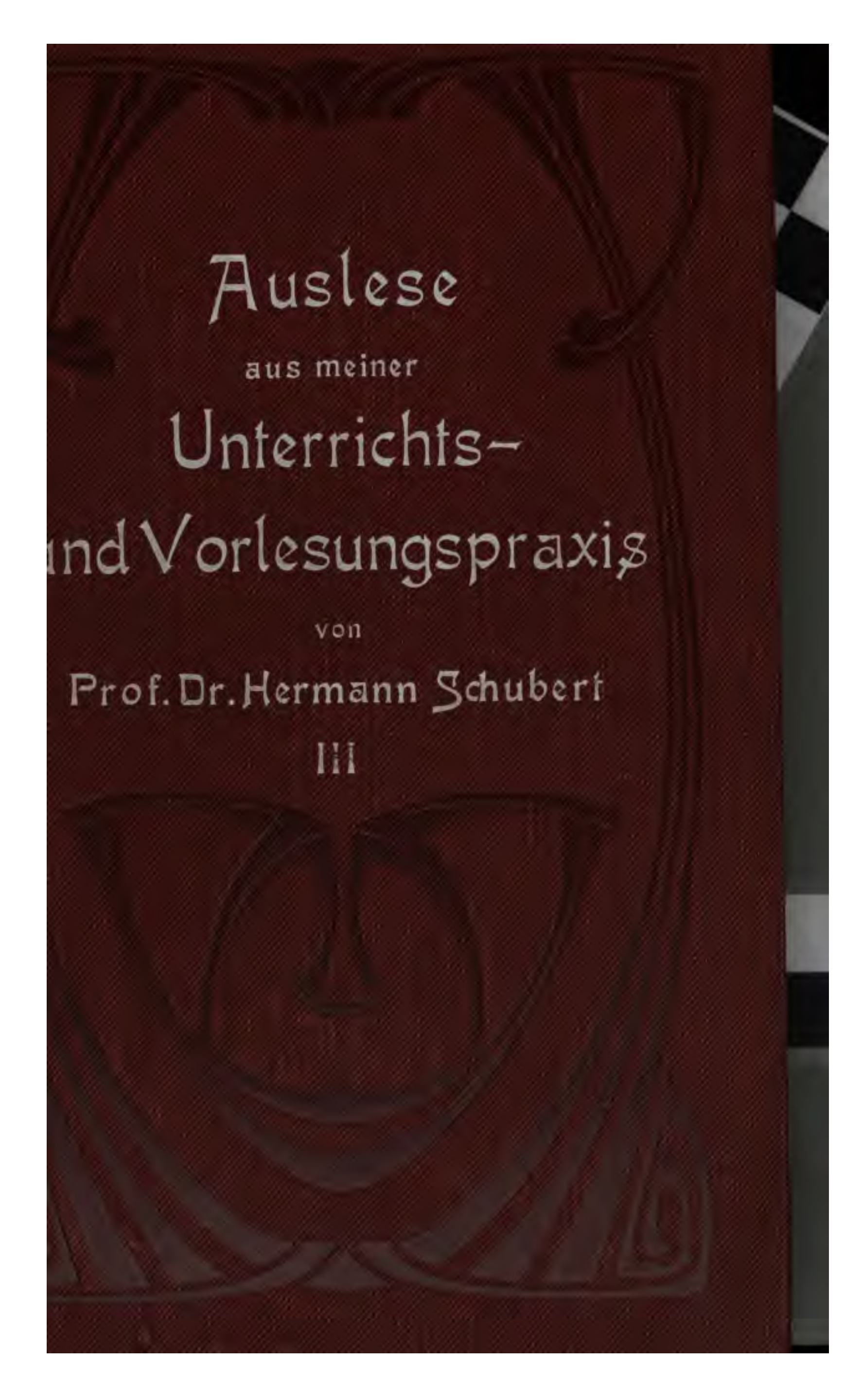
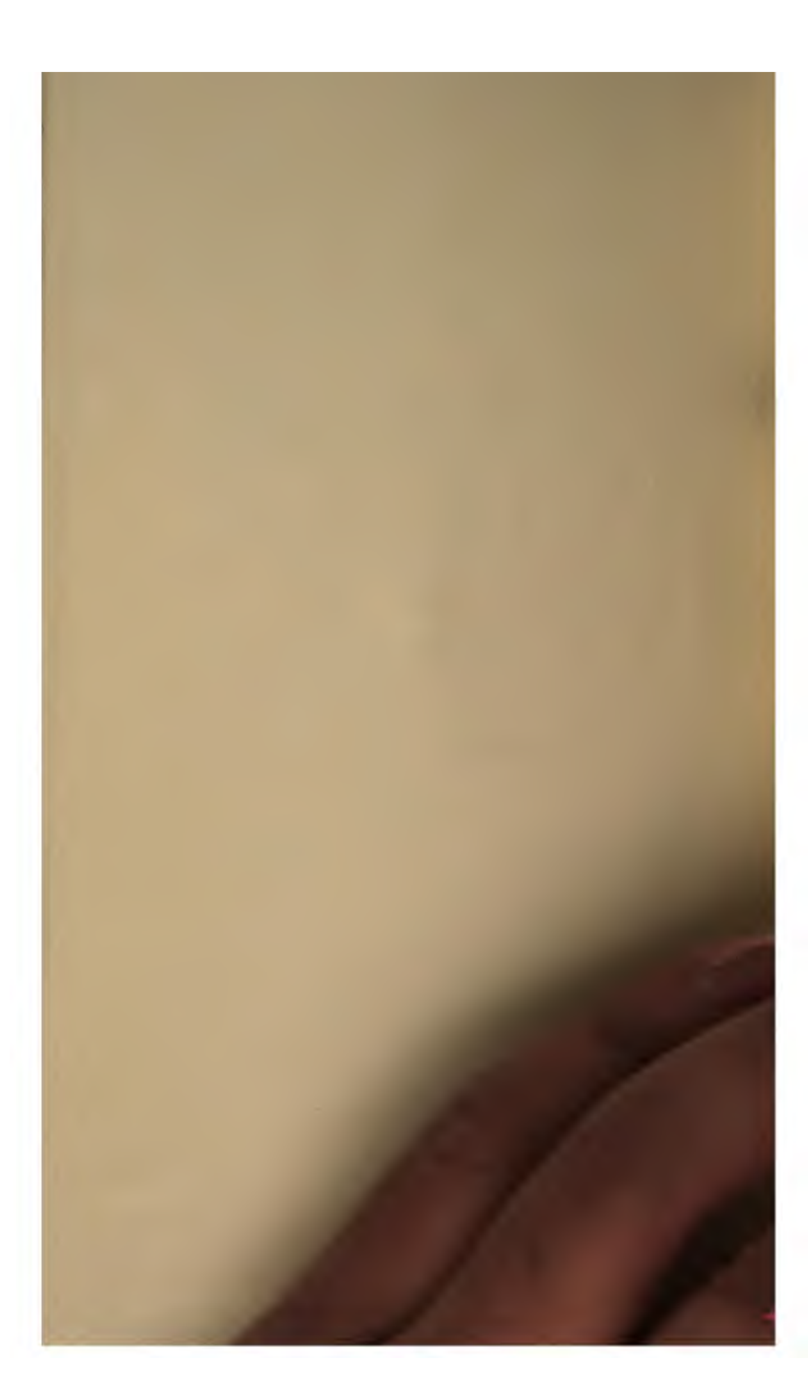
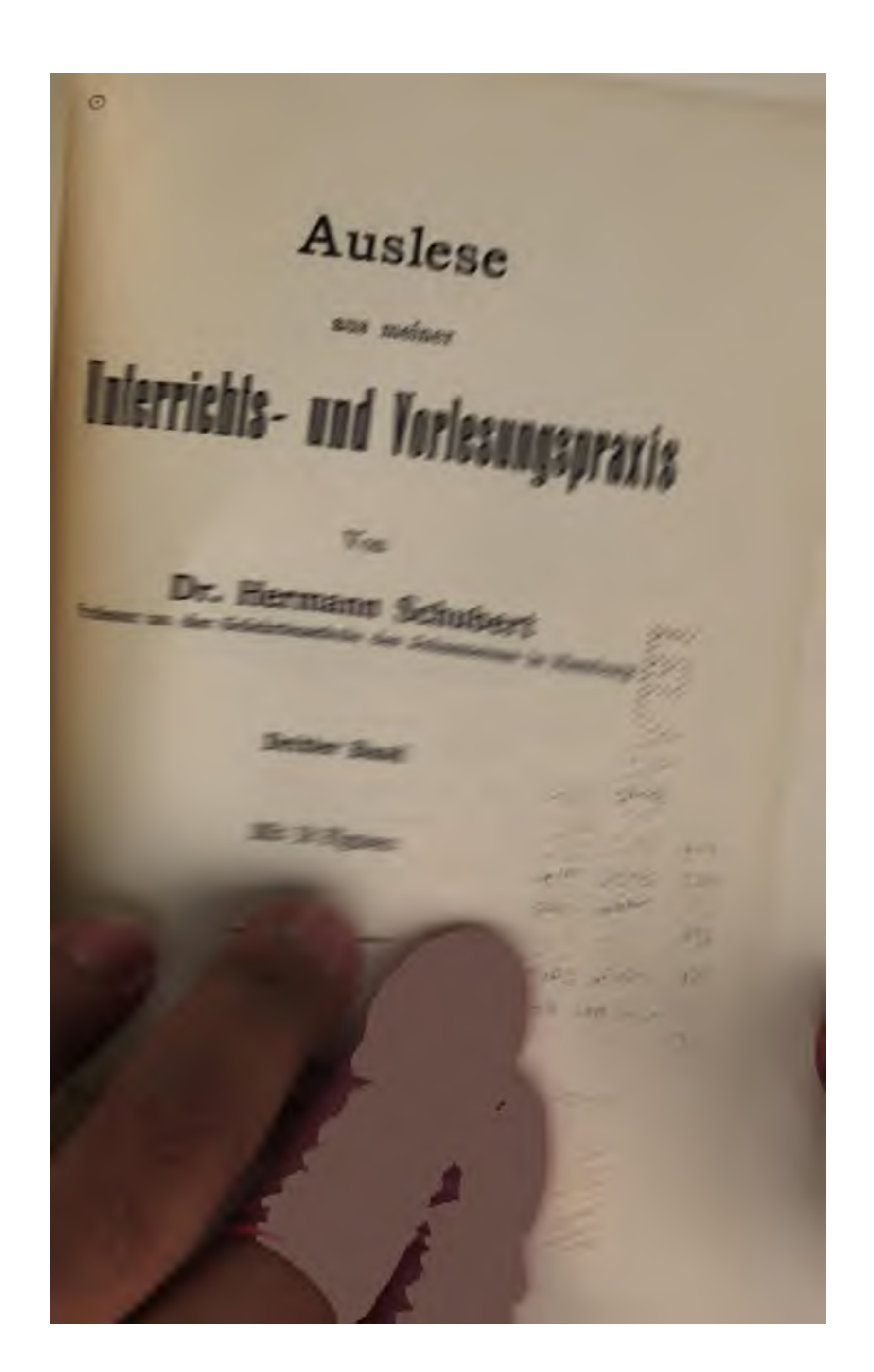

Auslese
aus meiner
Unterrichts-
und Vorlesungspraxis
von
Prof. Dr. Hermann Schubert
III







Auslese

aus meiner

Unterrichts- und Vorlesungspraxis

Von

Dr. Hermann Schubert

[illegible]

Dritter Band

Mit [illegible] Figuren

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig-R.

Inhaltsverzeichnis.

1*



I. Abschnitt.

Bestimmung von Schwerpunkten.

§ 1. Der Satz von den statischen Momenten.

Vor vierzig bis fünfzig Jahren enthielten die Lehrbücher über analytische Mechanik in erster Linie die Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung von Schwerpunkten beliebiger Linien, Flächen und Körper. Dann folgte vor etwa zwanzig Jahren eine gesunde und anerkennenswerte Reaktion gegen eine solche theoretisierende Mechanik, und mehr und mehr wuchs eine technische Mechanik, zum Nutzen der Praxis und der Ingenieure. Wie es aber meist bei Reaktionen der Fall ist, ging diese Reaktion zu weit, und heute findet man von mathematischen Bestimmungen von Schwerpunkten in Büchern über Mechanik sehr wenig noch und in Büchern über Integralrechnung meist gar nichts[1]). Dies wird jeder bedauern, der, so wie der Verfasser, den didaktischen Wert der mathematischen Schwerpunktsbestimmungen, sowohl

[1]) So enthält die für Anfänger sonst sehr brauchbare Integralrechnung von Kiepert in Hannover von Schwerpunktsbestimmungen gar nichts.

der elementaren wie der durch Integralrechnung, in der Schulpraxis und in der Vorlesungspraxis erkannt hat. In beiden Fällen bildet die Momentengleichung den Ausgangspunkt. Diese läßt sich in folgender Weise ganz elementar ableiten:

Das Hebelgesetz spricht aus, daß zwei parallel gerichtete Kräfte f_a und f_b, die in zwei fest mitein-

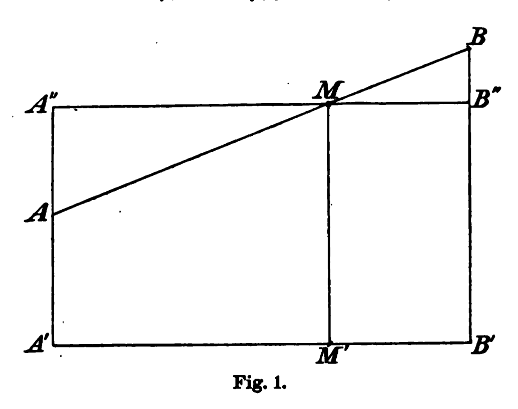


Fig. 1.

ander verbundenen Punkten A und B angreifen, dieselbe Wirkung haben, wie eine einzige Kraft, die dieselbe Richtung hat wie die beiden Kräfte, die zweitens, ihrer Intensität nach, so groß ist wie die beiden Kräfte zusammengenommen, und die drittens in einem Punkte M angreift, der AB im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte f_a und f_b teilt, so daß also

$$(1) \qquad f_a \cdot MA = f_b \cdot MB$$

ist. Diesem Gesetze läßt sich eine andere Form geben, die für die Ausdehnung auf n Kräfte und für weitere Anwendungen handlicher ist. Fällt man nämlich von A und von B aus auf eine beliebig gedachte Ebene E die Lote AA' und BB', legt dann durch diese Lote die Ebene P und zieht dann in dieser durch M die Parallele zu $A'B'$, welche die Lote AA' und BB' oder deren Verlängerungen in A'' und B'' schneidet, so erhält man durch den Proportionallehrsatz die Proportion:

$$MA : MB = AA'' : BB''. \tag{2}$$

Fällt man nun noch das Lot MM' auf die Ebene E, so ergibt sich:

$$AA'' = MM' - AA' \quad \text{und} \quad BB'' = BB' - MM'$$

oder:

$$AA'' = AA' - MM' \quad \text{und} \quad BB'' = MM' - BB'.$$

In beiden Fällen erhält man:

$$\frac{AA''}{BB''} = \frac{MM' - AA'}{BB' - MM'}. \tag{3}$$

Dann folgt aus (3) durch (1) und (2):

$$\frac{f_b}{f_a} = \frac{MM' - AA'}{BB' - MM'}$$

oder:

$$BB' \cdot f_b + AA' \cdot f_a = MM' \cdot (f_a + f_b). \tag{4}$$

Nennt man nun das Produkt einer Kraft mit dem Lote, das man von ihrem Angriffspunkte auf eine Ebene fällen kann, das **statische Moment** dieser

Kraft bezüglich der Ebene, so kann man den Inhalt der Formel (4) kurz so aussprechen: **Bezüglich jeder beliebigen Ebene ist die Summe der statischen Momente zweier parallel gerichteter Kräfte gleich dem statischen Momente ihrer Resultante.** Dieser Satz ist es nun, der sich auf beliebig viele parallele Kräfte ausdehnen läßt. Wenn nämlich eine dritte Kraft f_c, die mit f_a und f_b parallel gerichtet ist, in einem beliebigen Punkte C angreift, so kann man nach unserem Satze diese Kraft f_c mit der Kraft $f_a + f_b$, die in M angreift, zusammensetzen. Dadurch erhält man, wenn C' der Fußpunkt des von C auf die Ebene E gefällten Lotes ist, und wenn

$$NN' \cdot (f_a + f_b + f_c)$$

das statische Moment der Resultante der beiden Kräfte $f_a + f_b$ und f_c ist:

$$(5) \qquad CC' \cdot f_c + MM' \cdot (f_a + f_b) = NN' \cdot (f_a + f_b + f_c)\,.$$

Durch Addition von (4) und (5) ergibt sich nun:

$$(6) \quad AA' \cdot f_a + BB' \cdot f_b + CC' \cdot f_c = NN' \cdot (f_a + f_b + f_c)\,.$$

Man beachte bei unserem nunmehr auf drei parallele Kräfte ausgedehnten Satze, daß der Angriffspunkt der dritten parallelen Kraft eine ganz beliebige Lage haben kann, also insbesondere auch nicht in der oben mit P beseichneten Ebene zu liegen braucht. Auch darf die Richtung der drei parallelen Kräfte f_a, f_b, f_c ganz beliebig sein und ist insbesondere un-

abhängig von der Richtung der drei Lote AA', BB', CC'. In derselben Weise wie soeben (6) aus (4) folgte, kann man nun aus (6) die Richtigkeit des entsprechenden Satzes für vier Kräfte folgern und so beliebig fortfahren. Dadurch gelangen wir zu dem Satze von den statischen Momenten für beliebig viele parallele Kräfte, der folgendermaßen lautet:

Bezüglich jeder beliebigen Ebene ist die Summe der statischen Momente beliebig vieler parallel gerichteter Kräfte gleich dem statischen Momente ihrer Resultante.

Wenn wir die Intensitäten der Kräfte mit

$$f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$$

bezeichnen, mit

$$F_1F_1', F_2F_2', F_3F_3', \ldots F_nF_n'$$

die Lote, gefällt von den Angriffspunkten der n Kräfte auf die beliebige Ebene E, ferner mit S den Angriffspunkt der Resultante aller n Kräfte, mit S' den Fußpunkt des von S auf E gefällten Lotes, so können wir unseren Satz in arithmetischer Zeichensprache wiedergeben und als Momentengleichung bezeichnen:

$$f_1 \cdot F_1F_1' + f_2 \cdot F_2F_2' + \ldots + f_n \cdot F_nF_n'$$
$$= SS' \cdot [f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n]$$

oder noch kürzer:

$$\Sigma(f \cdot FF') = SS' \cdot \Sigma(f). \tag{7}$$

Bei den Anwendungen dieses Satzes von den statischen Momenten beachte man, daß die Ebene E

den Raum in zwei Halbräume zerlegt, und daß, wenn die Lote, die von den Punkten in dem einen dieser beiden Halbräume auf E gefällt werden können, positiv gerechnet sind, die Lote negativ zu rechnen sind, die von den in dem anderen Halbraum gelegenen Punkten ausgehen.

§ 2. Die Grundlage für die Schwerpunktbestimmung.

Die Gravitationswirkungen, welche die Erdmasse auf die Massenteilchen eines Körpers ausübt, können als von Kräften herrührend angesehen werden, die parallel gerichtet sind, weil die Entfernung irgend welcher zweier Punkte eines auf der Erdoberfläche befindlichen Körpers verschwindend klein ist gegenüber der Entfernung irgend eines solchen Punktes von dem Gravitationszentrum der Erdmasse, das mit dem Zentrum der Erdkugel fast übereinstimmt und demnach von jedem Punkte der Erdoberfläche etwa 860 Meilen entfernt ist. Deshalb kann der in § 1 für n Kräfte bewiesene Satz von den statischen Momenten auch auf die Kräfte angewandt werden, mit welchen die Erdmasse auf die verschiedenen Massenteilchen eines Körpers anziehend wirkt. Die Größe der Resultante aller dieser Kräfte nennt man das Gewicht des Körpers und den Angriffspunkt dieser Resultante Schwerpunkt des Körpers. Um die Lagen der Schwerpunkte aller möglichen beliebig ge-

stalteten Körper zu bestimmen, ist daher der Satz von den statischen Momenten ein erfolgreiches Mittel. Bei der Benutzung des Satzes zur Schwerpunktbestimmung wollen wir voraussetzen, daß die betrachteten Körper homogen sind, d. h. überall dieselbe Dichtigkeit haben, wodurch erreicht wird, daß die erwähnten Anziehungskräfte den Volumina der Körper, auf welche sie wirken, proportional sind, so daß in der Formel (7) des § 1 unter f die Volumenteilchen verstanden werden dürfen.

Von Gewicht und Schwerpunkt kann man natürlich nur bei Dingen sprechen, die stofflich, also dreidimensional sind. So wie aber die Geometrie aus den durch unsere Sinne wahrnehmbaren Körperformen durch Abstraktion zu zweidimensionalen und eindimensionalen Gebilden gelangt ist, nämlich zu Flächenteilen und Linienteilen, so kann man auch in der Schwerpunkttheorie zum Begriff des Schwerpunktes von Flächenteilen und von Linienteilen gelangen. Wenn wir z. B. in unserer Vorstellung von einem geraden, dreikantigen Prisma ausgehen und seine Höhe bis ins Unendlichkleine verringern, so gelangen wir zu einer Dreiecksfläche, und der Schwerpunkt des dreikantigen Prismas wird bei diesem geistigen Vorgange zum Schwerpunkte der Dreiecksfläche, den man nach § 4 als den Punkt findet, in welchem sich die drei Verbindungslinien der Ecken mit den Halbierungspunkten der Gegenseiten schneiden. Um dies

experimentell zu prüfen, hat man nur ein möglichst dünnes hölzernes Dreieck in irgend einem Punkte aufzuhängen und die vom Aufhängepunkte ausgehende vertikale gerade Linie auf dem hölzernen Dreiecke zu verzeichnen. Wenn man dann dieses Experiment für beliebige andere Aufhängepunkte wiederholt, wird man finden, daß die verzeichneten Linien sich alle in einem einzigen Punkte, dem Schwerpunkte der Dreiecksfläche, schneiden. Durch eine weitere Abstraktion kann man auch zum Begriffe des Schwerpunktes eines Dreiecksumfanges gelangen. Derselbe ist, wie in § 3, 2 gezeigt wird, das Zentrum des Inkreises desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Halbierungspunkte der drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind. Um auch dies experimentell zu prüfen, befestige man drei möglichst dünne Stangen an ihren Endpunkten aneinander, hänge das entstandene Gestänge in irgend einem Punkte einer der drei Stangen auf und merke sich die vom Aufhängepunkte ausgehende Vertikallinie. Wiederholt man diesen Versuch für andere Aufhängepunkte, so müssen die gemerkten Linien sich alle in einem einzigen Punkte schneiden, und dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecksumfanges. Auf analoge Weise kann man alle im folgenden bewerkstelligten Schwerpunktsbestimmungen experimentell kontrollieren.

Aus dem Hebelgesetz, mit dem wir in § 1 begannen, folgen unmittelbar zwei Sätze, die wir als Hauptsatz I und II bezeichnen wollen.

Hauptsatz I: Der Schwerpunkt eines aus zwei Teilen bestehenden Gebildes liegt auf der geraden Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Teile.

Hauptsatz II: Der Schwerpunkt eines aus zwei Teilen bestehenden Gebildes teilt die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte im umgekehrten Verhältnis der Gewichte (Volumina) dieser Teile.

Die übrigen Sätze, die wir zur Bestimmung der Schwerpunkte von Linienteilen, Flächenteilen und Körpern brauchen, bestehen aus acht Formeln bzw. Formelpaaren, die aus einer Anwendung der in § 1 bewiesenen Momentengleichung unmittelbar hervorgehen. Behufs Fixierung der Vorstellungen wollen wir die X-Achse in der Papierebene von links nach rechts, die Y-Achse in derselben Ebene von oben nach unten, die Z-Achse senkrecht zur Ebene des Papiers annehmen, und als Ebene E, auf welche von den verschiedenen Massenpunkten eines Körpers aus, behufs Feststellung der statischen Momente, Lote zu fällen sind, wollen wir erstens die Ebene zwischen der Y-Achse und der Z-Achse, zweitens die Ebene zwischen der X-Achse und der Z-Achse annehmen. Demgemäß sollen die Lote des Schwerpunktes auf diese Ebenen beziehungsweise ξ und η heißen. Bezeichnet allgemein dm ein Massenelement, x das Lot, gefällt von ihm auf die angenommene Ebene, ξ das

Lot vom Schwerpunkte auf diese Ebene, so läßt sich der Satz von den statischen Momenten durch zwei Integralzeichen wiedergeben, indem das eine Summenzeichen Σ sich auf unendlich viele Produkte $x \cdot dm$, das andere Summenzeichen Σ sich auf unendlich viele Massenteile dm erstreckt. Es ist also allgemein:

$$\int x \cdot dm = \xi \cdot \int dm .$$

Da wir voraussetzen, daß die Gebilde, deren Schwerpunkte wir bestimmen, völlig homogen sein sollen, so kann immer das Differential dm des Massenelementes durch das Differential des Linienelementes, des Flächenelementes oder des Körperelementes ersetzt werden. In diesem Sinne wollen wir auch die soeben genannte Gleichung kurz die Momentengleichung nennen. Die Gebilde, deren Schwerpunkte wir im folgenden, größtenteils durch die Momentengleichung, bestimmen, sollen der Reihe nach sein: Linienteile, ebene Flächenteile, Teile von Rotationsflächen, Körper. Bei den Linienteilen und den ebenen Flächenteilen werden wir außer den Cartesischen Koordinaten auch Polarkoordinaten anwenden, welche mit den Cartesischen Koordinaten bekanntlich durch die folgenden Beziehungen verknüpft sind:

$$r^2 = x^2 + y^2 , \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} , \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} .$$

Bezeichnet ds das Linienelement, so besteht zwischen ds, dx und dy nach dem Pythagoras die Beziehung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

Aus der allgemeinen Formel für die Länge einer Linie, nämlich $\int ds$, wird in Polarkoordinaten bekanntlich:

$$\int ds = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi \,.$$

Analog gesellt sich zu der allgemeinen Formel für ein ebenes Flächenstück, begrenzt von der Strecke zwischen zwei Punkten der X-Achse, den beiden zugehörigen Ordinaten und dem Bogen zwischen den beiden zugehörigen Kurvenpunkten, nämlich zu $\int y\,dx$, die in Polarkoordinaten ausgedrückte Formel für einen beliebigen Sektor:

$$\int \tfrac{1}{2} \cdot r^2 d\varphi \,.$$

Hiernach erhalten wir für die Bestimmung des Schwerpunktes einer begrenzten Linie in Cartesischen Koordinaten:

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int x\,ds = \xi \cdot \int ds \\ \int y\,ds = \eta \cdot \int ds \end{array} \right\},$$

wo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ist.

Wenn die Linie durch eine Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist, so erhält man die Lage des Schwerpunktes eines Linienteiles durch das Gleichungspaar:

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot r \cos\varphi \, d\varphi \\ &\qquad = \xi \cdot \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi \\ &\int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot r \sin\varphi \, d\varphi \\ &\qquad = \eta \cdot \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi \end{aligned} \right\} .$$

Für ein ebenes Flächenstück von der oben beschriebenen Art erhält man als Flächeninhalt $\int y\,dx$. Daher wird die Summe der statischen Momente bezüglich der Ebene zwischen der Y-Achse und der Z-Achse zu $\int x y\,dx$, dagegen die analoge Summe bezüglich der Ebene zwischen der X-Achse und der Z-Achse zu $\int \frac{1}{2} y \cdot y\,dx$. Demgemäß erhalten wir die Lage des Schwerpunktes eines ebenen Flächenstückes aus:

$$\text{(V)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int x y\,dx &= \xi \cdot \int y\,dx \\ \int \tfrac{1}{2} y^2\,dx &= \eta \cdot \int y\,dx \end{aligned} \right\} .$$

Wenn wir hierbei zu Polarkoordinaten übergehen, haben wir erstens zu beachten, daß der Inhalt eines Sektors, der zwischen zwei Radien und dem Bogen zwischen ihren Endpunkten liegt, gleich $\int \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi$ ist, zweitens auch, daß der Schwerpunkt eines Sektorelementes vom Nullpunkt der Polarkoordinaten um zwei Drittel des Radius entfernt ist, so daß sein Abstand von der Ebene zwischen der

Y-Achse und Z-Achse $\frac{2}{3} r \cos\varphi$ wird und sein Abstand von der Ebene zwischen der X-Achse und Z-Achse $\frac{2}{3} r \sin\varphi$. So erhält man, nachdem man rechts und links durch $\frac{1}{2}$ dividiert hat:

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{2}{3} r^3 \cos\varphi \, d\varphi = \xi \cdot \int r^2 \, d\varphi \\ \int \frac{2}{3} r^3 \sin\varphi \, d\varphi = \eta \cdot \int r^2 \, d\varphi \end{array} \right\}.$$

Bei **Rotationsflächen** haben wir zu unterscheiden, ob die Rotation um die X-Achse oder um die Y-Achse stattgefunden hat. Je nachdem ist das Flächenelement

$$2 \pi y \, ds \quad \text{oder} \quad 2 \pi x \, ds \,,$$

wo $ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ist. Im ersten Falle liegt der Schwerpunkt natürlich auf der X-Achse, im zweiten Falle auf der Y-Achse. Im ersten Falle hat man also nur ξ, im zweiten Falle nur η zu bestimmen. Demgemäß ergibt sich, nachdem man durch 2π beiderseits gehoben hat, für den Schwerpunkt eines Teiles einer Rotationsfläche:

$$\text{(VII)} \quad \int x y \, ds = \xi \cdot \int y \, ds \quad \text{(um die } X\text{-Achse)},$$
$$\text{(VIII)} \quad \int x y \, ds = \eta \cdot \int x \, ds \quad \text{(um die } Y\text{-Achse)}.$$

Analog ergibt sich für Rotationskörper, wo $y^2 \pi \, dx$ bzw. $x^2 \pi \, dy$ als Körperelement zu betrachten ist, je nachdem die Rotation um die X-Achse oder um die Y-Achse stattfand:

$$\text{(IX)} \quad \int x y^2 \, dx = \xi \cdot \int y^2 \, dx \quad \text{(um die } X\text{-Achse)},$$
$$\text{(X)} \quad \int x^2 y \, dy = \eta \cdot \int x^2 \, dy \quad \text{(um die } Y\text{-Achse)}.$$

Die 12mal 2 Integrale in diesen 12 Formeln sind ohne Grenzen geschrieben, weil diese Grenzen sich nach den verschiedenartigen Anwendungen richten, zu denen wir jetzt übergehen.

§ 3. Schwerpunkte von begrenzten Linien.

1. Schwerpunkt einer geraden Strecke. Denkt man sich die statischen Momente aller Punkte einer geraden Strecke AB bezüglich der Symmetrieebene von AB, d. h. bezüglich der Ebene, welche auf der Strecke AB in deren Halbierungspunkte M senkrecht steht, so erkennt man, daß immer die Summe der statischen Momente zweier Punkte, die von M gleiche Entfernung haben, Null sein muß, indem die Lote, gefällt von zwei solchen Punkten auf die Symmetrieebene, zwar gleiche Länge haben müssen, aber mit verschiedenen Vorzeichen zu rechnen sind, weil sie auf diese Ebene von entgegengesetzten Seiten aus zu fällen sind. Hieraus folgt, daß die Summe der statischen Momente aller Punkte einer Strecke bezüglich ihrer Symmetrieebene Null ist. Hieraus folgt aber nach dem Satze von den statischen Momenten, daß auch $\xi \cdot m$ Null sein muß, wo ξ den Abstand des Schwerpunktes der geraden Strecke, m ihre Länge bedeutet. Also ist $\xi = 0$ oder, was dasselbe ist, der Schwerpunkt einer geraden Strecke ist ihr Halbierungspunkt.

2. **Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks.** Der Schwerpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC ist nach 1. der Halbierungspunkt C' dieser Seite. Ebenso ist der Halbierungspunkt B' der Seite AC der Schwerpunkt von AC. Folglich liegt nach Hauptsatz I des § 2 der Schwerpunkt D des aus den beiden geraden Strecken AB und AC bestehenden Ge-

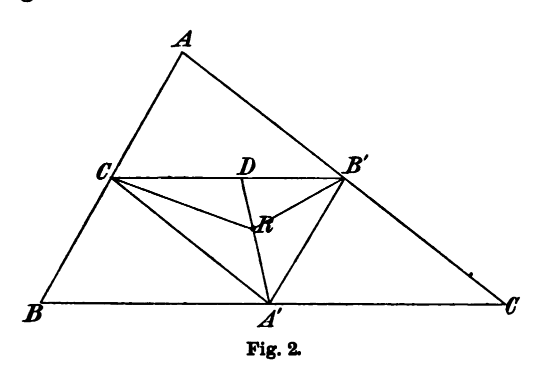


Fig. 2.

bildes auf der geraden Verbindungsstrecke $B'C'$, und D muß nach Hauptsatz II des § 2 diese Strecke im umgekehrten Verhältnis der Seitenlängen AB und AC teilen, also:

$$DC' : DB' = b : c ,$$

wo b und c die Seiten AC bzw. AB bedeuten. Hiernach muß nun der Schwerpunkt R des aus den drei Seiten AB, AC, BC bestehenden Gebildes, d. h. des Umfanges des Dreiecks ABC auf DA' liegen, wo A' die Mitte der Seite BC bedeutet. Verbindet man

nun die Seitenmitte A' mit den Seitenmitten B' und C', so muß die Verbindungsstrecke $A'B'$ parallel AB und halb so groß, also gleich $\frac{1}{2}c$ sein. Ebenso muß $A'C'$ parallel AC und gleich $\frac{1}{2}b$ sein. Demnach wird aus der obengenannten Proportion:

$$DC' : DB' = \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{2}c = A'C' : A'B'\,.$$

Also ist $A'D$ im Dreiecke $A'B'C'$ eine von der Ecke A' ausgehende Strecke, welche die Gegenseite $B'C'$ im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Folglich halbiert $A'D$ im Dreiecke $A'B'C'$ den Winkel $B'A'C'$, und zwar nach der Umkehrung eines elementaren planimetrischen Satzes. Wenn wir nun, statt, wie soeben, von den in A zusammenstoßenden Seiten AB und AC auszugehen, von den in B zusammenstoßenden Seiten BA und BC ausgehen, erkennen wir durch die analogen Betrachtungen, daß der gesuchte Schwerpunkt R des Umfanges eines Dreiecks ABC auf der Halbierungslinie des Winkels $A'B'C'$ liegen muß. Drittens muß R auch auf der Halbierungslinie des Winkels $B'C'A'$ liegen. Da nun der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks das Zentrum seines Inkreises sein muß, d. h. des Kreises, der die drei Seiten berührt, so erhalten wir als Resultat: Der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks ist das Zentrum des Inkreises desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Halbierungspunkte der drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind.

3. **Schwerpunkt eines Kreisbogens.** Da die sogenannte elementare Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens sich doch als eine Summierung von unzählig vielen unendlich kleinen Größen ergibt, wie es ja auch nicht anders sein kann, so benutzen wir für die gesuchte Bestimmung lieber von vornherein die Integralrechnung, indem wir Formel (III) aus § 2 benutzen. Um $\int x\,ds$ für den Fall des Kreisbogens zu bestimmen, schließen wir aus der Mittelpunktsgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

des Kreises $x\,dx + y\,dy = 0$, woraus, da $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ist, folgt:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{r}{x},$$

so daß wir:

$$\int x\,ds = \int r\,dy$$

erhalten. Indem wir nun die Länge der der Y-Achse parallelen Sehne b nennen und von $-\frac{b}{2}$ bis $+\frac{b}{2}$ integrieren, erhalten wir durch Ausführung des Integrales $r \cdot b$, während andererseits $\xi \cdot \int ds = \xi \cdot c$ kommt, wenn c die Länge des Bogens bedeutet, dem die Sehne b zugehört, so daß sich ergibt:

$$\xi = r \cdot \frac{b}{c},$$

d. h. in Worten: Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf dem Radius, der die Mitte

desselben mit dem Zentrum verbindet, und zwar in der Entfernuug $r \cdot \frac{b}{c}$ vom Zentrum, wo c die Länge des Kreisbogens, b die Länge der zugehörigen Sehne, r den Radius bedeutet. Insbesondere ergibt sich für den Halbkreisbogen, wo $b = 2r$, $c = r \cdot \pi$ ist, $\xi = r \cdot \frac{2}{\pi} = r \cdot \frac{7}{11}$, wo für π der archimedeische Näherungswert $\frac{22}{7}$ gesetzt ist. Ebenso ergibt sich für den Schwerpunkt des Quadrantenbogens, wo $b = r\sqrt{2}$, $c = r \cdot \frac{\pi}{2}$ ist, daß derselbe auf der Verbindungsstrecke des Halbierungspunktes dieses Bogens mit dem Zentrum liegt, und zwar vom Zentrum um $r \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = r \cdot \frac{49}{55}$ entfernt, wo näherungsweise $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt ist. Beim Bogen des Sextanten, wo $b = r$, $c = r \cdot \frac{\pi}{3}$ ist, liegt der Schwerpunkt dem Halbierungspunkte des Bogens noch näher, indem $\xi = r \cdot \frac{3}{\pi} = r \cdot \frac{21}{22}$ ist, also der Schwerpunkt den Halbierungsradius im Verhältnis 21 zu 1 teilt.

4. **Schwerpunkt des Umfanges eines Kreissegmentes.** Die gesuchte Schwerpunktslage ergibt

sich aus 3. durch Anwendung der Momentengleichung bezüglich der Ebene, die durch das Kreiszentrum parallel der Sehne b geht. Bezeichnet ξ den Abstand des Schwerpunktes des Bogens, der dem Kreissegmente zugehört, ϱ den Abstand des Halbierungspunktes seiner Sehne von der genannten Ebene und ξ' den Abstand des Schwerpunktes des Kreissegmentumfanges von dieser Ebene, so ergibt die Momentengleichung nach 3.:

$$r \cdot \frac{b}{c} \cdot c + \varrho \cdot b = \xi' \cdot (b + c)$$

oder:

$$\xi' = \frac{b \cdot (r + \varrho)}{b + c},$$

wo noch ϱ durch die Gleichung $\varrho^2 = r^2 - \frac{b^2}{4}$ von r und b abhängt. Um zu wissen, wie der hier berechnete Schwerpunkt innerhalb des Kreissegmentes liegt, haben wir ξ' um ϱ zu vermindern, wodurch wir erhalten:

$$\xi' - \varrho = \frac{b \cdot r - c \cdot \varrho}{b + c}.$$

Dies bedeutet den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von der Sehne. Um auch den Abstand vom Halbierungspunkte des Bogens zu berechnen, haben wir r um ξ' zu vermindern, wodurch wir erhalten:

$$r - \xi' = \frac{c \cdot r - b \cdot \varrho}{b + c}.$$

Für den Halbkreisumfang, wo $b = 2r$, $c = r \cdot \pi$, $\varrho = 0$ ist, ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \xi' - \varrho &= r \cdot \frac{2}{2 + \pi} = \frac{7}{18} r \\ r - \xi' &= r \cdot \frac{\pi}{2 + \pi} = \frac{11}{18} r \end{aligned}\right\},$$

wo wieder $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt ist.

5. **Schwerpunkt des Umfanges eines Kreissektors.** Indem wir den Abstand des gesuchten Schwerpunktes mit ξ'' bezeichnen und sonst die in 4. angewandte Bezeichnung beibehalten, erhalten wir durch die auf dieselbe Ebene wie in 4. bezogene Momentengleichung:

$$\frac{r \cdot b}{c} \cdot c + \frac{\varrho}{2} \cdot r + \frac{\varrho}{2} \cdot r = \xi'' \cdot (2r + c),$$

daß der Schwerpunkt des Umfanges eines Kreissektors vom Zentrum die Entfernung:

$$\xi'' = \frac{r(b + \varrho)}{2r + c}$$

hat. Für den Halbkreis ergibt sich in Übereinstimmung mit 4.:

$$\xi'' = r \cdot \frac{2}{2 + \pi} = \frac{7}{18} r.$$

6. **Der Schwerpunkt eines Parabelbogens,** gerechnet vom Scheitel O bis zu einem beliebigen Punkte P, dessen Koordinaten $x = a$, $y = b$ sind,

hat eine Lage, die durch das Formelpaar (III) aus § 2 bestimmt wird. Die Gleichung der Parabel, deren Achse die X-Achse ist und deren Parameter p ist, ist $y^2 = 2px$, woraus $y\,dy = p\,dx$ folgt. Um ds zu berechnen, hat man von

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

auszugehen, woraus, wenn wir durch dy^2 dividieren, hervorgeht:

$$ds = \frac{\sqrt{y^2 + p^2} \cdot dy}{p}.$$

Es ist daher:

$$\int ds = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2} \cdot dy.$$

Für die beiden anderen in dem Formelpaare (III) auftretenden Integrale ergibt sich:

$$\int x\,ds = \int \frac{y^2}{2p^2} \sqrt{p^2 + y^2} \cdot dy$$

und:

$$\int y\,ds = \int \frac{y}{p} \sqrt{p^2 + y^2} \cdot dy.$$

Wir beschränken uns auf die Bestimmung von ξ, den Abstand des Schwerpunktes des Parabelbogens OP von der Scheiteltangente. Dann haben wir die beiden Integrale $\int \sqrt{p^2 + y^2}\,dy$ und $\int y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\,dy$ zu berechnen. Dieselben hängen von dem bekannten Integrale:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right)$$

ab, wo l das Zeichen für den natürlichen Logarithmus ist. Von der Richtigkeit dieses Integrales überzeuge man sich durch Differenzieren. Dadurch, daß wir

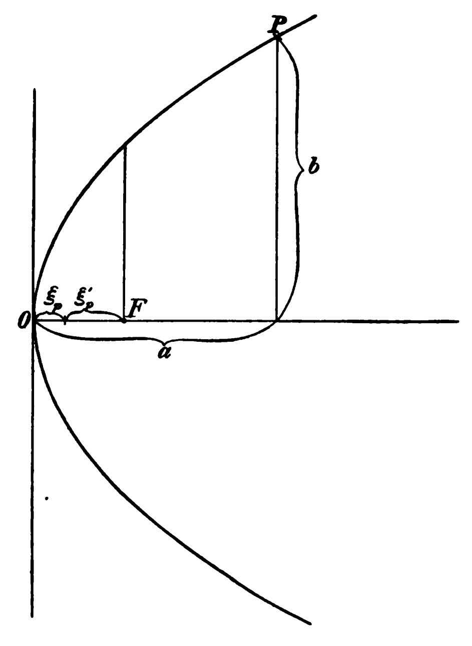


Fig. 3.

$\sqrt{p^2 + y^2} = \dfrac{p^2 + y^2}{\sqrt{p^2 + y^2}}$ setzen, erhalten wir:

$$\int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \int \frac{p^2\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} + \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}}\,.$$

Andererseits erhalten wir durch partielle Integration:

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} = y \cdot \sqrt{p^2+y^2} - \int dy \sqrt{p^2+y^2}\,.$$

Durch Addition der beiden zuletzt erhaltenen Integrale ergibt sich:

$$2 \cdot \int \sqrt{p^2+y^2}\,dy = \int \frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} + y \cdot \sqrt{p^2+y^2}$$

oder:

$$\int \sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p^2}{2}\,l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right).$$

Außerdem ergibt sich aus den beiden Integralen durch Subtraktion:

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} = \frac{y}{2}\sqrt{p^2+y^2} - \frac{p^2}{2}\,l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right).$$

Auf dieses letztgenannte läßt sich aber das in der Formel für ξ steckende Integral durch partielle Integration zurückführen, indem:

$$\int y^2\,dy \sqrt{p^2+y^2} = \frac{y^3}{4}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p^2}{4} \cdot \int \frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}}$$

ist. Demnach erhält man:

$$\int y^2\,dy \sqrt{p^2+y^2} = \frac{y^3}{4}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p^2 y}{8}\sqrt{p^2+y^2}$$

$$- \frac{p^4}{8}\,l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right).$$

Also ist:

$$\int x\,ds = \frac{y^3}{8p^2}\cdot\sqrt{p^2+y^2} + \frac{y}{16}\cdot\sqrt{p^2+y^2}$$

$$-\frac{p^2}{16}\,l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right).$$

Aus dem oben für $\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy$ berechneten Integrale ergibt sich ferner:

$$\int ds = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\,l\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right).$$

Die beiden Integrale haben aber die Grenzen $y = 0$ und $y = b$, so daß wir erhalten:

$$\int x\,ds = \frac{b^3}{8p^2}\cdot\sqrt{p^2+b^2} + \frac{b}{16}\sqrt{p^2+b^2}$$

$$-\frac{p^2}{16}\,l\,\frac{b+\sqrt{p^2+b^2}}{p}$$

und:

$$\int ds = \frac{b}{2p}\cdot\sqrt{p^2+b^2} + \frac{p}{2}\,l\,\frac{b+\sqrt{p^2+b^2}}{p}.$$

Der Quotient der zuletzt gefundenen Ausdrücke für die beiden Integrale ergibt den Abstand ξ des Schwerpunktes des Parabelbogens OP von der Scheiteltangente. Als Beispiel berechnen wir diesen Abstand ξ für den Fall, daß der Punkt P auf dem Lote liegt, das im Brennpunkte auf der Achse errichtet werden kann. Dann ist $b = p$ zu setzen, und

wir erhalten für den gesuchten Abstand, den wir ξ_p nennen:

$$\xi_p = p \cdot \frac{\frac{3}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{16}\, l(1+\sqrt{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\, l(1+\sqrt{2})}$$

oder:

$$\xi_p = \frac{p}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2} - l(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2} + l(1+\sqrt{2})} = p \cdot 0{,}18303\,.$$

Denselben Abstand von der Scheiteltangente muß auch nach den beiden Hauptsätzen in § 2 der Schwerpunkt des doppelt so großen Bogens haben, der von der Sehne abgeschnitten wird, die durch den Brennpunkt geht und senkrecht zur Achse ist.

Ein zweiter Weg zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes des Bogens zwischen den beiden Punkten, deren Koordinaten $x = \frac{p}{2}$, $y = +p$ und $x = \frac{p}{2}$, $y = -p$ sind, geht von der Polargleichung aus, die den Brennpunkt der Parabel als Pol nimmt. Diese Polargleichung lautet bekanntlich:

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

wo φ der Winkel ist, den der vom Brennpunkte aus beliebig gezogene Radius mit der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Scheitel der Parabel bildet. Nach der Grundformel (IV) des § 2 haben wir zunächst $\int\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$ zu bestimmen, und zwar in

den Integralgrenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Für $\frac{dr}{d\varphi}$ erhalten wir

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}},$$

so daß

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = \frac{p}{2\cos^3\frac{\varphi}{2}}$$

wird. Wir haben deshalb $\int d\varphi \cdot \frac{1}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$ zu berechnen, oder, wenn $\varphi = 2t$ gesetzt wird:

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Andererseits haben wir $\int x\,ds$ zu berechnen, d. h., da $x = r\cos\varphi$ oder:

$$x = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \cos\varphi$$

ist,

$$\frac{p^2}{4}\int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\cos^5\frac{\varphi}{2}},$$

oder, da $\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$ ist:

$$\frac{p^2}{4}\int \frac{2\,d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} - \frac{p^2}{4}\int \frac{d\varphi}{\cos^5\frac{\varphi}{2}}.$$

Wenn wir wieder $\varphi = 2\,t$ setzen, so ist nunmehr unser Problem auf die Auswertung der Integrale

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{\cos^5 t}$$

zurückgeführt, und zwar in den Grenzen $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{4}$, da vorher von $\pi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu integrieren war. Diese beiden Integrale hängen nun von dem Integrale:

$$\int \frac{dt}{\cos t}$$

ab, für das die Integralrechnung $l \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$ findet, so daß man erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = l \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = l(\sqrt{2} + 1)\,.$$

Demnach ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = \left[\frac{\sin t}{2\cos^2 t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\,l(1 + \sqrt{2})$$

in Übereinstimmung mit dem schon oben für $\int ds$ erhaltenen Resultate, in welchem $b = p$ zu setzen ist.

Um nun auch $\int \frac{dt}{\cos^5 t}$ zu berechnen, erhalten wir zunächst:

$$\int \frac{dt}{\cos^5 t} = \frac{\sin t}{4\cos^3 t} + \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\cos^3 t}\,,$$

und dann:

$$\int \frac{dt}{\cos^5 t} = \frac{\sin t}{4\cos^4 t} + \frac{3}{8}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{3}{8}\int \frac{dt}{\cos t},$$

also, da von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{4}$ zu integrieren war:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^5 t} = \left[\frac{\sin t}{4\cos^4 t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \tfrac{3}{8}\sqrt{2} + \tfrac{3}{8}\,l(1+\sqrt{2})$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{3}{8}\sqrt{2} + \tfrac{3}{8}\,l(1+\sqrt{2})$$

$$= \tfrac{7}{8}\sqrt{2} + \tfrac{3}{8}\,l(1+\sqrt{2}).$$

Nun war:

$$\frac{p^2}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} - \frac{p^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^5\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{p^2}{4}\left[4\int\frac{dt}{\cos^3 t} - 2\int\frac{dt}{\cos^5 t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

auszuwerten. Wir erhalten also:

$$\frac{p^2}{4}\left[2\sqrt{2} + 2\,l(1+\sqrt{2}) - \tfrac{7}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{4}\,l(1+\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{p^2}{4}\left[\tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{5}{4}\,l(1+\sqrt{2})\right] = \frac{p^2}{16}\left[\sqrt{2} + 5\,l(1+\sqrt{2})\right].$$

Um nun ξ'_p zu bestimmen, haben wir dieses Resultat durch die oben gefundene Bogenlänge

$$\frac{p}{2}\sqrt{2} + \frac{p}{2}\,l(1+\sqrt{2})$$

zu dividieren, wobei man beachte, daß hier der Abstand ξ'_p des gesuchten Schwerpunktes vom Brennpunkte, oben bei der Berechnung durch Cartesische Koordinaten der Abstand ξ_p des Schwerpunktes vom Scheitel berechnet ist. Hier erhalten wir:

$$\xi'_p = \frac{p}{8} \cdot \frac{\sqrt{2} + 5\,l(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + l(1 + \sqrt{2})} = p \cdot 0{,}31697\,,$$

während wir oben erhielten:

$$\xi_p = \frac{p}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2} - l(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + l(1 + \sqrt{2})} = p \cdot 0{,}18303\,.$$

Daß $\xi_p + \xi'_p = \frac{1}{2}p$ ist, liefert eine Bestätigung der beiden Berechnungen.

7. **Der Schwerpunkt eines Bogens der Kettenkurve** ergibt sich sehr leicht aus der Gleichung der Kettenlinie, die in Cartesischen Koordinaten lautet:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

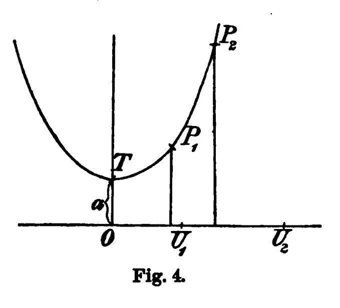


Fig. 4.

wo a die Strecke ist, die sich für y ergibt, wenn $x = 0$ ist, d. h. die Erhebung des tiefsten Punktes T der Kettenlinie über dem Nullpunkte der Koordinaten auf der Y-Achse, welche die Kettenlinie, unendlich lang gedacht, in zwei symmetrische Hälften zerlegt, eine

rechte und eine linke. Die Strecke a heiße Parameter der Kettenlinie, die gerade Linie, die sie in zwei symmetrische Hälften zerlegt, hier die vertikal gedachte Y-Achse, heiße ihre Achse. Um die Bogenlänge der Kettenlinie zwischen zwei als gegeben zu betrachtenden Punkten zu bestimmen, haben wir:

$$\int ds = \int dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

zu berechnen. Zunächst ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

dann:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right),$$

woraus folgt:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right),$$

so daß

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}$$

wird. Daher ist:

$$s = \int ds = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Da nun das Quadrat von $e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}$ um 4 kleiner ist als das Quadrat von $e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$, so kommt:

$$s = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Nun haben wir noch die Integrationsgrenzen zu berücksichtigen und erhalten, wenn s_{12} die Bogenlänge zwischen dem Punkte x_1, y_1 und dem Punkte x_2, y_2 bedeutet:

$$s_{12} = \sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2} .$$

Hiernach erhält man die Bogenlänge zwischen zwei Punkten P_1 und P_2, wenn man um den tiefsten Punkt T mit den Radien y_1 und y_2 Kreise beschreibt, die die X-Achse in U_1 und U_2 treffen. Dann ist die gerade Strecke $U_1 U_2$ gleich dem Bogen $P_1 P_2$.

Um den Abstand ξ des Schwerpunktes des Bogens $P_1 P_2$ von der Achse der Kettenlinie zu berechnen, haben wir:

$$\int x\, ds = \int \frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

auszuführen. Dies geschieht durch die bekannte Formel der partiellen Integration:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du ,$$

indem man $u = x$, $dv = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ setzt. So erhält man:

$$s \cdot \xi = \frac{ax}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

wo nun noch die Integrationsgrenzen x_1, y_1 und x_2, y_2 zu berücksichtigen sind. Dadurch erhalten wir:

$$s_{12} \cdot \xi = \frac{a x_2}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}}\right) - \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x_2}{a}} + e^{-\frac{x_2}{a}}\right)$$

$$- \frac{a x_1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right) + \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right).$$

Wie oben führen wir nun wieder y ein, wodurch wir bekommen:

$$s_{12} \cdot \xi = x_2 \cdot \sqrt{y_2^2 - a^2} - a y_2 - x_1 \sqrt{y_1^2 - a^2} + a y_1$$

oder, wenn wir den oben berechneten Wert von s_{12} einführen:

$$\xi = \frac{x_2 \cdot \sqrt{y_2^2 - a^2} - a \cdot y_2 - x_1 \cdot \sqrt{y_1^2 - a^2} + a y_1}{\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}}.$$

Um nun auch η, die Ordinate des Schwerpunktes des Bogens $P_1 P_2$ zu berechnen, haben wir das Integral $\int y\, ds$ auszuführen, oder:

$$\int \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{a}{4}\int dx \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right)$$

$$= \frac{a^2}{8}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + \frac{a x}{2}$$

$$= \frac{a^2}{8}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + \frac{a x}{2},$$

oder, nach Einführung der Grenzen:

$$s_{12} \cdot \eta = \tfrac{1}{2} y_2 \cdot \sqrt{y_2^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} y_1 \cdot \sqrt{y_1^2 - a^2} + \frac{a}{2}(x_2 - x_1),$$

woraus folgt:

$$\eta = \frac{\tfrac{1}{2} y_2 \cdot \sqrt{y_2^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} y_1 \cdot \sqrt{y_1^2 - a^2} + \frac{a}{2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}}.$$

Die beiden für ξ und η gefundenen Quotienten zeigen, daß, wenn von einer Kettenlinie der Parameter und die Koordinaten der Endpunkte eines Bogens $P_1 P_2$ bezüglich des gewählten Koordinatenkreuzes gegeben sind, sich die Lage des Schwerpunktes dieses Bogens mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

Um ein allgemeineres Beispiel zu geben, setzen wir:

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = a \cdot l\frac{m+n}{m-n}\,,$$

also

$$y_1 = a\,, \quad y_2 = a \cdot \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\,,$$

wo m und n ganze Zahlen sein mögen, und $m > n$ sei. Dadurch kommt:

$$s_{12} = a \cdot \frac{2mn}{m^2-n^2}\,,$$

$$\xi = a \cdot l\frac{m+n}{m-n} - a \cdot \frac{n}{m}\,,$$

$$\eta = \frac{a}{2} \cdot \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} + a \cdot \frac{m^2-n^2}{4mn} \cdot l\frac{m+n}{m-n}\,.$$

Setzt man spezieller $m = 2$, $n = 1$, so erhält man bei dem Bogen vom tiefsten Punkte T aus bis zu einem Punkte, dessen Koordinaten $x = a \cdot l\,3$, $y = \frac{5}{3}a$ sind, für die Länge $\frac{4}{3}a$ und für die Lage des Schwerpunktes:

$$\begin{cases} \xi = a \cdot l\,3 - \dfrac{a}{2} = a \cdot 0{,}5986\,, \\ \eta = \frac{5}{6} \cdot a + \frac{3}{8} \cdot a\,l\,3 = a \cdot 1{,}2453\,. \end{cases}$$

8. **Der Schwerpunkt eines Bogens der Zykloide** ergibt sich aus den Gleichungen in Cartesischen Koordinaten. Ist t der Wälzungswinkel, d. h. der Winkel, um den sich der Punkt P des auf einer geraden Linie rollenden Kreises gedreht hat, bis P die Koordinaten x und y erhält, und ist a der Radius des rollenden Kreises, so lauten die beiden Gleichungen der von P beschriebenen Zykloide:

$$x = a \cdot (t - \sin t)\,, \quad y = a \cdot (1 - \cos t)\,,$$

also:

$$dx = a \cdot (1 - \cos t)\,dt\,, \quad dy = a \cdot \sin t\,dt\,,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= a^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)\,dt^2 \\ &= 2\,a^2 (1 - \cos t)\,dt^2 = 4\,a^2 \sin^2 \frac{t}{2}\,dt^2\,, \end{aligned}$$

so daß:

$$\int ds = 2\,a \int \sin\frac{t}{2}\,dt = 4\,a \int \sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right),$$

und wenn wir in den Grenzen $t = 0$ bis $t = t$ integrieren,

$$s = -4\,a\left(\cos\frac{t}{2} - 1\right) = 8\,a \cdot \sin^2\frac{t}{4}\,,$$

so daß, je nachdem der Wälzungswinkel von 0 bis 2π, bis π oder bis $\frac{2}{3}\pi$ angewachsen ist, der Zykloidenbogen die Längen s_1, s_2, s_3 erhält, wo:

$$s_1 = 8\,a\,, \quad s_2 = 4\,a\,, \quad s_3 = 2\,a$$

ist.

Um nun auch die Lage des Schwerpunktes eines Zykloidenbogens bestimmen zu können, haben wir $\int x\,ds$ und $\int y\,ds$ auszuführen oder:

$$\int x\,ds = 2\,a^2 \cdot \int t \cdot \sin\frac{t}{2}\,dt - 2\,a^2 \int \sin t \cdot \sin\frac{t}{2}\,dt\,.$$

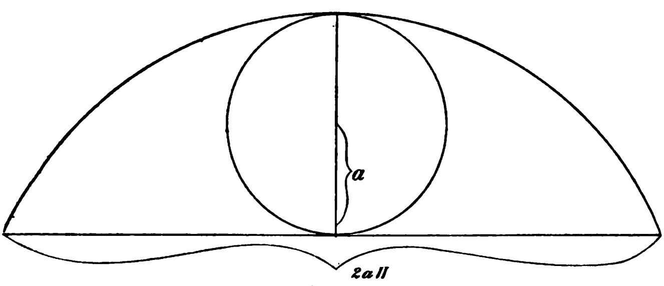


Fig. 5.

Nun ist aber, wie sich durch partielle Integration ergibt, $\int x \sin x\,dx = -x \cdot \cos x + \sin x$. Demnach ist:

$$2\,a^2 \cdot \int t \cdot \sin\frac{t}{2} \cdot dt = 8\,a^2 \cdot \left(-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right).$$

Ferner ist:

$$2 \sin t \cdot \sin\frac{t}{2} = \cos\frac{t}{2} - \cos\tfrac{3}{2}\,t\,,$$

daher:

$$-2\,a^2 \cdot \int \sin t \cdot \sin\frac{t}{2}\,dt = -2\,a^2 \cdot \int \cos\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$+ \tfrac{2}{3}\,a^2 \int \cos\tfrac{3}{2}\,t \cdot (d\,\tfrac{3}{2}\,t) = -2\,a^2 \sin\frac{t}{2} + \tfrac{2}{3}\,a^2 \cdot \sin\tfrac{3}{2}\,t\,.$$

Demnach erhält man:

$$\int x\,ds = 6\,a^2 \sin\frac{t}{2} - 4\,a^2 t \cos\frac{t}{2} + \tfrac{2}{3}\,a^2 \sin\tfrac{3}{2}\,t\,.$$

Dies ist zugleich das Integral von 0 bis t, so daß wir, mit Benutzung des obigen Resultates für $\int ds$, für den Schwerpunkt des Bogens von $t = 0$ bis $t = t$ erhalten:

$$\xi = \frac{\tfrac{3}{4}\,a \sin\frac{t}{2} - \frac{a}{2}\,t \cos\frac{t}{2} + \frac{a}{12} \sin\tfrac{3}{2}\,t}{\sin^2\frac{t}{4}}\,.$$

Um auch η, den Abstand des Schwerpunktes des Bogens von der geraden Linie, auf welcher der Kreis rollt, zu erhalten, haben wir $\int y\,ds$ auszuführen, oder

$$\int a\cdot(1 - \cos t)\cdot 2\,a\cdot \sin\frac{t}{2}\,dt = 4\,a^2 \int \sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 8\,a^2 \int \sin^3\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right).$$

Nun ist bekanntlich

$$\int \sin^3 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \tfrac{2}{3}\cos x\,,$$

so daß wir erhalten:

$$\int y\,ds = \frac{8\,a^2}{3}\left(-\sin^2\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2}\right),$$

und, wenn wie oben, von $t = 0$ bis $t = t$ integriert wird:

$$\frac{8\,a^2}{3}\left(-\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + 2\right),$$

so daß wir erhalten:

$$\eta = \int\limits_{t=0}^{t=t} y\,ds : \int\limits_{t=0}^{t=t} ds = \frac{\frac{a}{3}\left(-\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + 2\right)}{\sin^2\frac{t}{4}}.$$

Hieraus kann man noch, durch Einführung von $\frac{t}{4}$ und trigonometrische Umformungen, erhalten:

$$\eta = \frac{4\,a}{3} \cdot \sin^2\frac{t}{4}\left(1 + 2\cos^2\frac{t}{4}\right).$$

Als Beispiele nehmen wir die drei Bögen der Zykloide, deren Längen oben bestimmt sind, d. h. wir setzen $t = 2\,\pi$, $t = \pi$, $t = \frac{2}{3}\,\pi$.

Indem wir diese Werte einsetzen, erhalten wir:

$$\xi_1 = a \cdot \pi\,, \quad \eta_1 = \tfrac{4}{3}\,a\,;$$
$$\xi_2 = \tfrac{4}{3}\,a\,, \quad \eta_2 = \tfrac{4}{3}\,a\,;$$
$$\xi_3 = a \cdot \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{2}{3}\,\pi\right), \quad \eta_3 = \tfrac{5}{6}\,a$$

für die Abstände der drei Schwerpunkte der drei Bögen, deren Längen oben bestimmt sind, und zwar zu:

$$s_1 = 8\,a\,, \quad s_2 = 4\,a\,, \quad s_3 = 2\,a\,.$$

9. **Der Schwerpunkt eines Bogens der Astroide** wird bestimmt durch deren Gleichungen in Cartesischen Koordinaten, welche, wenn t der Wälzungswinkel und wenn a der Radius des größeren Kreises ist, auf dem das Rollen stattfindet, so lauten:

$$x = a \cdot \cos^3 t\,, \quad y = a \cdot \sin^3 t\,.$$

Aus beiden folgt zunächst ds durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Da:

$$dx = -3\,a\cos^2 t\sin t\,dt \quad \text{und} \quad dy = 3\,a\sin^2 t\cos t\,dt$$

ist, so erhält man:

$$ds = 3\,a\sin t\cos t\,dt$$

oder:

$$s = \int ds = \tfrac{3}{2}\,a\int\sin 2\,t\,dt = \tfrac{3}{4}\,a\int\sin 2\,t\,d(2\,t)$$

$$= -\tfrac{3}{4}\,a\cos 2\,t\,.$$

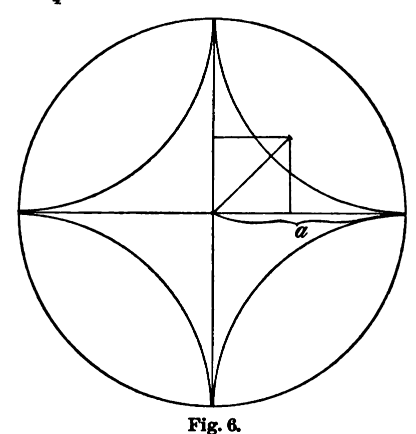


Fig. 6.

Nun sind aber noch die Integralgrenzen zu berücksichtigen, welche $t = 0$ und $t = t$ sein mögen. Dadurch kommt:

$$s = \tfrac{3}{4}\,a(1 - \cos 2\,t) = \tfrac{3}{2}\,a\sin^2 t\,.$$

Insbesondere ergibt sich für $t = \frac{\pi}{2}$ die Länge des Astroidenquadranten $s_1 = \frac{3}{2}\,a$. Da der Bogen des Astroidenquadranten um dessen Halbierungslinie

symmetrisch liegt, so muß für $t = \frac{\pi}{4}$ sich $s_2 = \frac{3}{4} a$ ergeben, was in der Tat der Fall ist. Für $t = \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$ ergibt sich bzw. $s_3 = \frac{9}{8} a$ und $s_4 = \frac{3}{8} a$. Hieraus folgt, daß der Astroidenquadrant durch die Halbierungslinie und die beiden Trisektionslinien des zugehörigen rechten Zentriwinkels in vier gleiche Teile geteilt wird.

Um die Lage des Schwerpunktes eines Bogens der Astroide zu finden, haben wir $\int x\,ds$ zu bestimmen, wofür sich ergibt:

$$\int 3\,a^2 \cos^4 t \sin t\,dt = -\frac{3\,a^2}{5} \cos^5 t\,,$$

also in den Grenzen von 0 bis t:

$$\xi \cdot s = \frac{3}{5} a^2 (1 - \cos^5 t)\,,$$

so daß man erhält:

$$\xi = \frac{2}{5} a \frac{1 - \cos^5 t}{\sin^2 t}\,.$$

Analog ergibt sich:

$$\int y\,ds = 3\,a^2 \sin^4 t \cos t\,dt = \frac{3}{5} a^2 \sin^5 t\,,$$

also in den Grenzen von 0 bis t:

$$\eta = \frac{2}{5} a \cdot \frac{\sin^5 t}{\sin^2 t} = \frac{2}{5} a \sin^3 t\,.$$

Die beiden für ξ und η erhaltenen Resultate, welche die Lage des Schwerpunktes eines beliebigen Astroidenbogens angeben, spezialisieren wir noch für

den Astroidenquadranten, wenn wir $t = \frac{\pi}{2}$ setzen. Man erhält:

$$\xi = \eta = \tfrac{2}{5} a ,$$

oder in Worten: **Wenn a der Radius des Kreisquadranten ist, dessen Ecken auch Ecken eines Astroidenquadranten sind, so ist dessen Länge $\tfrac{3}{2} a$, und sein Schwerpunkt liegt auf der Halbierungslinie des Kreisquadranten, und zwar von jedem Radius um $\tfrac{2}{5} a$ entfernt.**

10. **Der Schwerpunkt des Umfanges eines Astroidenquadranten** läßt sich aus 9. leicht entnehmen, und zwar am einfachsten durch die grundlegende Momentengleichung, bezogen auf die Ebene, welche die Ebene der Astroide in einem der beiden begrenzenden Radien senkrecht durchschneidet. Da der Schwerpunkt des Radienpaares die Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beiden Radien halbieren muß, also $\frac{a}{4}$ als Abstand von der erwähnten Ebene hat, so erhalten wir nach der Momentengleichung:

$$2\,a \cdot \frac{a}{4} + \frac{3}{2}\,a \cdot \frac{2}{5}\,a = \xi' \cdot \left(2\,a + \frac{3}{2}\,a\right),$$

wo ξ' der Abstand des gesuchten Schwerpunktes des Umfanges des Astroidenquadranten ist. Also ist:

$$\xi' = \frac{11}{35} \cdot a \,.$$

Dasselbe ergibt sich natürlich für η'. Also: **Der Schwerpunkt des Umfanges eines Astroiden-**

quadranten liegt auf dessen Halbierungslinie und zwar $\frac{11}{35}$ der Radiuslänge von jedem der beiden Radien entfernt.

11. **Der Schwerpunkt eines Dreispitzbogens.** Unter „Dreispitz" verstehe ich die Kurve, die ein fester Punkt eines beweglichen Kreises beschreibt, während er einen festen Kreis mit dreimal so großem Radius dauernd von innen berührt. Durch Abrollung der Peripherie des kleineren Kreises entsteht ein Dreispitzbogen, der ein Drittel des ganzen Dreispitzes ist, und dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll. Wenn t den Wälzungswinkel des größeren Kreises bedeutet, so ist für den Dreispitz:

$$x = a \cdot (2 \cos t + \cos 2t)\,; \quad y = a \cdot (2 \sin t - \sin 2t)\,,$$

so daß man für $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erhält:

$$ds^2 = 4a^2 (1 + 1 + 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t)\, dt^2$$

oder:

$$ds^2 = 8a^2 (1 - \cos 3t)\, dt^2 = 16\, a^2 \sin^2 \tfrac{3}{2} t\, dt^2\,,$$

also:

$$ds = 4\, a \sin \tfrac{3}{2} t\, dt\,,$$

woraus durch Integrieren folgt:

$$s = -\tfrac{8}{3}\, a \cos \tfrac{3}{2} t\,,$$

und, wenn $t = 0$ und $t = t$ als Integrationsgrenzen genommen werden:

$$s = \tfrac{8}{3}\, a (1 - \cos \tfrac{3}{2} t)$$

oder

$$s = \frac{16\, a}{3} \sin^2 \frac{3}{4} t\,,$$

so daß sich für die Länge des ganzen Bogens, d. h. für $t = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{16\,a}{3}$ ergibt, wobei man beachte, daß a den Radius des kleineren Kreises bedeutet, der in dem größeren Kreise mit dem Radius $b = 3\,a$ rollt.

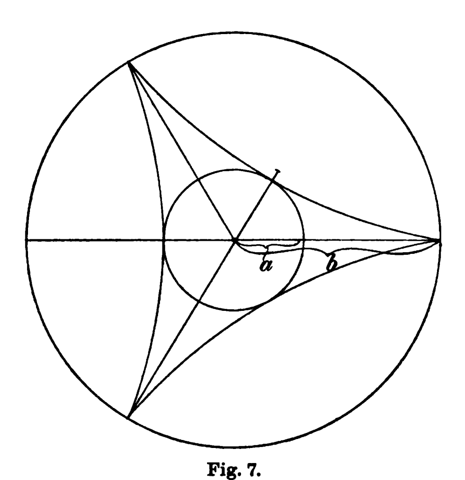


Fig. 7.

Um auch die Lage des Schwerpunktes eines Dreispitzbogens zu berechnen, haben wir:

$$\xi \cdot s = \int x\,ds \quad \text{und} \quad \eta \cdot s = \int y\,ds$$

auszuführen, wo ξ und η die Abstände des gesuchten Schwerpunktes von den Koordinatenachsen bedeuten. Man erhält:

$$\xi \cdot s = 8\,a^2 \int \cos t \sin \tfrac{3}{2}\,t\,dt + 4\,a^2 \int \cos 2\,t \sin \tfrac{3}{2}\,t\,dt\,.$$

Um die beiden Integrale zu berechnen, benutzen wir, daß $2 \cos t \sin \frac{3}{2} t = \sin(\frac{3}{2} t + t) + \sin(\frac{3}{2} t - t)$ und daß $2 \cos 2 t \sin \frac{3}{2} t = \sin(2 t + \frac{3}{2} t) - \sin(2 t - \frac{3}{2} t)$ ist. So erhalten wir:

$$\xi \cdot s = 4 a^2 \cdot \int \sin \frac{5}{2} t\, dt + 4 a^2 \cdot \int \sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$+ 2 a^2 \cdot \int \sin \frac{7}{2} t\, dt - 2 a^2 \cdot \int \sin \frac{t}{2}\, dt .$$

Hieraus ergibt sich durch Zusammenfassen und Integrieren zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$:

$$\xi \cdot s = \left[-\frac{8}{5} a^2 \cos \frac{5}{2} t - 4 a^2 \cos \frac{t}{2} - \frac{4}{7} a^2 \cos \frac{7}{2} t \right]_{t=0}^{t=t},$$

und, da $1 - \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ist:

$$\xi \cdot s = \frac{16}{5} a^2 \sin^2 \frac{5}{4} t + 8 a^2 \sin^2 \frac{t}{4} + \frac{8}{7} a^2 \sin^2 \frac{7}{4} t ,$$

also:

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 \frac{3}{4} t} \cdot \left(\frac{3}{5} \sin^2 \frac{5}{4} t + \frac{3}{2} \sin^2 \frac{t}{4} + \frac{3}{14} \sin^2 \frac{7}{4} t \right),$$

welches Resultat für jeden Bogen gilt, der von der Anfangslage an beschrieben ist, bis der Wälzungswinkel für den größeren Kreis gleich t geworden ist. Indem wir $t = \frac{2\pi}{3}$ setzen, erhalten wir für den Schwerpunkt des Dreispitzbogens:

$$\xi = \frac{a}{4} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{2} + \frac{3}{14} \right),$$

da der Sinus von $\frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi}{3}$, von $\frac{5}{4} \cdot \frac{2\pi}{3}$, von $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{3}$, von $\frac{7}{4} \cdot \frac{2\pi}{3}$ beziehungsweise: $+1$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ ist. So kommt:

$$\xi = \frac{3a}{4} \cdot \frac{27}{35} = \frac{81}{140} \cdot a .$$

Um auch η zu bestimmen, haben wir $\int y\, ds$ zu finden. Wir erhalten:

$$\int y\, ds = 8\, a^2 \int \sin t \cdot \sin \tfrac{3}{2}\, t \cdot dt - 4\, a^2 \int \sin 2\, t \cdot \sin \tfrac{3}{2}\, t \cdot dt ,$$

und, indem wir ähnlich wie oben bei ξ verfahren:

$$\int y\, ds = -4\, a^2 \int \cos \frac{5}{2}\, t\, dt + 4\, a^2 \int \cos \frac{t}{2}\, dt$$
$$+2\, a^2 \int \cos \frac{7}{2}\, dt - 2\, a^2 \int \cos \frac{t}{2}\, dt .$$

So kommt, wenn zunächst wieder von $t = 0$ bis $t = t$ integriert wird:

$$\eta \cdot s = \left[-\frac{8}{5}\, a^2 \sin \frac{5}{2}\, t + \frac{4}{7}\, a^2 \sin \frac{7}{2}\, t + 4\, a^2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^t$$

oder:

$$\eta = a \cdot \frac{-\frac{8}{5} \sin \frac{5}{2}\, t + \frac{4}{7} \sin \frac{7}{2}\, t + 4 \sin \frac{t}{2}}{\frac{16}{3} \sin^2 \frac{3}{4}\, t} .$$

Wenn wir nun $t = \frac{2\pi}{3}$ setzen und beachten, daß $\sin \frac{5}{3}\pi$, $\sin \frac{7}{3}\pi$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{2}$ beziehungsweise $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$+\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $+\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $+1$ ist, so erhalten wir für unser auf den ganzen Dreispitzbogen bezügliches η:

$$\eta = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{28} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} a \sqrt{3} \cdot \frac{27}{70}$$

$$= \frac{81}{140} \cdot \sqrt{3} \cdot a\,.$$

Da wegen der Symmetrie des Dreispitzbogens bezüglich der Halbierungslinie seines 120^0 betragenden Zentriwinkels der Schwerpunkt dieses Bogens auf der Halbierungslinie liegen muß, so muß

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$$

sein, wodurch eine Bestätigung gefunden ist. Es liegt nahe, die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes vom gemeinsamen Zentrum der beiden Kreise zu berechnen. Für diese ergibt sich $\xi : \cos 60^0 = \frac{81}{70} \cdot a$.

Man erhält also den Schwerpunkt eines Dreispitzbogens, wenn man den 120^0 betragenden Zentriwinkel des Dreispitzbogens halbiert und den auf dieser Halbierungslinie gelegenen Radius a des kleineren Kreises um $\frac{11}{70}$ seiner Länge verlängert. Der Endpunkt der Verlängerung ist der gesuchte Schwerpunkt.

Genau so, wie in 11. der Dreispitzbogen und in 10. die Astroide behandelt sind, läßt sich jede Hypozykloide behandeln, auch wenn das Verhältnis des

Radius des rollenden Kreises zum Radius des festen Kreises nicht speziell 1 zu 3 oder 1 zu 4, sondern ein allgemeines ist. Auch die Epizykloiden lassen sich so behandeln. Hier wollen wir jedoch nur noch die Kardioide untersuchen.

12. **Der Schwerpunkt eines Bogens der Kardioide.** Wenn ein beweglicher Kreis auf einem ebenso großen festen Kreise, diesen von außen berührend, rollt, so beschreibt ein bestimmter Punkt des beweglichen Kreises eine Kardioide, deren Gleichung in Polarkoordinaten lautet:

$$r = a \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} .$$

Zunächst erhält man:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -a \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} ,$$

also:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2}$$

$$= a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} ,$$

so daß wir erhalten:

$$ds = a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi .$$

Hieraus ergibt sich die Länge s_{12} eines beliebigen Kardioidenbogens zwischen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$:

$$s_{12} = 2\, a \sin \tfrac{1}{2} \varphi_2 - 2\, a \sin \tfrac{1}{2} \varphi_1 .$$

Setzt man $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$, so erhält man, daß die Hälfte der ganzen Kardioidenperipherie $2a$ ist, diese selbst also $4a$ ist, d. h. viermal so groß als der Durchmesser jedes der beiden erzeugenden Kreise. Die Hälfte s der ganzen Peripherie zwischen $\varphi = 0$ und

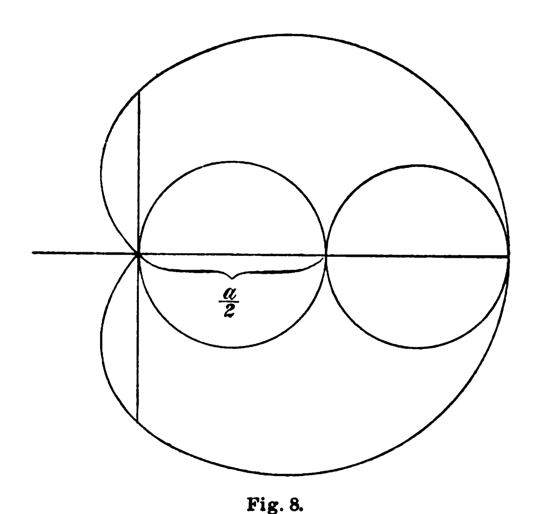


Fig. 8.

$\varphi = \pi$ wird durch das Lot im Nullpunkte auf dem Durchmesser in zwei Teile s_1 und s_2 zerlegt. Um s_1 zu berechnen, haben wir $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 = 0$ zu setzen und erhalten:

$$s_1 = a\sqrt{2}\,.$$

Für s_2 haben wir $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, was

$$s_2 = 2a - a\sqrt{2}$$

ergibt.

Um ξ, den Abstand des Schwerpunktes eines Kardioidenbogens von dem soeben erwähnten Lote auf dem Durchmesser, zu berechnen, haben wir zunächst das oben berechnete $ds = a \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$ mit $x = r\cos\varphi$ zu multiplizieren. Für r setzen wir dabei statt $a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ das mit ihm identische $\frac{a}{2}(1 + \cos\varphi)$, so daß wir erhalten:

$$x = \frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{a}{2}\cos^2\varphi = \frac{a}{2}\cos\varphi + \frac{a}{4} + \frac{a}{4}\cos 2\varphi.$$

Demnach kommt:

$$x \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a^2}{2}\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\cos 2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Indem wir nun die Formel

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

anwenden, erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{a^2}{4}\cdot\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \\ &\quad + \frac{a^2}{8}\cos\frac{5\varphi}{2} + \frac{a^2}{8}\cos\frac{3\varphi}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{8}a^2\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{a^2}{8}\cos\frac{5\varphi}{2}, \end{aligned}$$

so daß nun durch Integrieren folgt:

$$\xi \cdot s = \int x\, ds = a^2 \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\sin\frac{3\varphi}{2} + \frac{a^2}{20}\sin\frac{5\varphi}{2}$$

oder:

$$\xi \cdot s = \frac{a^2}{20}\cdot\left(20\sin\frac{\varphi}{2} + 5\sin\frac{3\varphi}{2} + \sin\frac{5\varphi}{2}\right),$$

also, mit Benutzung des oben berechneten Resultates für s:

$$\xi = \frac{\left[20\cdot\sin\frac{\varphi}{2} + 5\cdot\sin\frac{3\varphi}{2} + \sin\frac{5\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}}{\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}}\cdot\frac{a}{40}.$$

Wenn wir nun $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ setzen, erhalten wir für den Schwerpunkt jeder Hälfte der ganzen Kardioidenperipherie:

$$\xi = \frac{a}{40}\cdot\frac{20 - 5 + 1}{1} = \frac{2}{5}\cdot a.$$

Für den Schwerpunkt des oben mit s_1 bezeichneten Bogens ist $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, so daß kommt:

$$\xi_1 = \frac{a}{40}\cdot\frac{20\sqrt{\frac{1}{2}} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}\cdot a.$$

Für den Schwerpunkt des zweiten, oben mit s_2 bezeichneten Bogens ist $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \pi$ zu setzen, so daß kommt:

$$\xi_2 = \frac{a}{40} \cdot \frac{20\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) - 5\,(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}) + (1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})}{1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a}{40} \cdot \frac{16 - 24\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \frac{a}{5}(2\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 1)$$

$$= -\frac{a}{5}(\sqrt{2} - 1)\,.$$

Um auch den Abstand η des Schwerpunktes des Kardioidenbogens von dem Durchmesser zu berechnen, der durch den Nullpunkt geht, haben wir zunächst $y\,ds$ zu berechnen. Wir erhalten:

$$y = \frac{a}{2}(1 + \cos\varphi)\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin\varphi + \frac{a}{4}\sin 2\,\varphi$$

und daraus:

$$y\,ds = \frac{a^2}{2}\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2\,\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{a^2}{4}\sin\frac{3\,\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{8}\sin\frac{5\,\varphi}{2} + \frac{a^2}{8}\sin\frac{3\,\varphi}{2}$$

$$= \frac{a^2}{8}\sin\frac{5\,\varphi}{2} + \frac{3}{8}\,a^2\sin\frac{3\,\varphi}{2} + \frac{a^2}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\,,$$

also durch Integrieren:

$$\eta \cdot s = \frac{a^2}{20}\left[-\cos\frac{5\,\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2} + \frac{a^2}{4}\left[-\cos\frac{3\,\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}$$

$$+ \frac{a^2}{2}\left[-\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2},$$

daher:

$$\eta = \frac{\left[-10\cos\frac{\varphi}{2} - 5\cos\frac{3\varphi}{2} - \cos\frac{5\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}}{\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi=\varphi_2}} \cdot \frac{a}{40}.$$

Wenn wir nun wieder $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = 0$ setzen, erhalten wir:

$$\eta = \frac{a}{40} \cdot \frac{10+5+1}{1} = \frac{2}{5} \cdot a.$$

Wenn wir weiter $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 = 0$ setzen, erhalten wir für den Schwerpunkt des oben mit s_1 bezeichneten Bogens:

$$\eta_1 = \frac{10+5+1-10\sqrt{\tfrac{1}{2}}+5\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{40}$$

$$= \frac{16-4\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{40} = \frac{a}{10}(4\sqrt{2}-1).$$

Wenn wir endlich $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ setzen, erhalten wir für den Schwerpunkt des oben mit s_2 bezeichneten Bogens:

$$\eta_2 = \frac{+10\sqrt{\tfrac{1}{2}}-5\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{40} = \frac{a}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{a}{10}(\sqrt{2}+1).$$

Der besseren Übersicht wegen stellen wir unsere dreimal drei speziellen Resultate nochmal zusammen:

$s = 2 \cdot a$	$\xi = \frac{2}{5} \cdot a$	$\eta = \frac{2}{5} \cdot a$
$s_1 = a \cdot \sqrt{2}$	$\xi_1 = \frac{3}{5} \cdot a$	$\eta_1 = \frac{a}{10}(4\sqrt{2} - 1)$
$s_2 = a \cdot (2 - \sqrt{2})$	$\xi_2 = -\frac{a}{5}(\sqrt{2} - 1)$	$\eta_2 = \frac{a}{10}(\sqrt{2} + 1)$

Die Momentengleichung, wonach:

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \xi = s_1 \cdot \xi_1 + s_2 \cdot \xi_2 \\ s \cdot \eta = s_1 \cdot \eta_1 + s_2 \cdot \eta_2 \end{array} \right\}$$

sein muß, liefert eine Bestätigung.

§ 4. Schwerpunkte von begrenzten ebenen Flächen.

1. **Schwerpunkt einer Dreiecksfläche.** Da in einem Dreiecke ABC nach § 3, 1 die Schwerpunkte aller mit BC parallelen Strecken in deren Mitte liegen, und da diese Mitten die gerade Linie bilden, welche die Ecke A mit der Mitte D der Seite BC verbindet, so muß auch der Schwerpunkt der ganzen Dreiecksfläche[1]) auf der Transversale AD liegen. Da

---

[1]) Das hier angewandte Erkenntnisprinzip ist immer unvermeidlich, wenn auf Gebilde nächst höherer Dimension, z. B. von Linien auf Flächen, geschlossen wird. In analytischer Fassung benutzt man dieses Prinzip, wenn man unzählig viele unendlich kleine Größen durch ein Integral summiert.

man genau so für die mit AC bzw. AB parallelen Strecken schließen kann, so ergibt sich, daß der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche der Schnittpunkt S der drei Transversalen ist, d. h. der drei Verbindungslinien der Ecken mit den Mitten der Gegenseiten. Die Planimetrie lehrt, daß dieser Punkt S jede der drei Transversalen im Verhältnis 2 zu 1 teilt, indem der größere Abschnitt nach der Ecke zu, der kleinere nach der Seitenmitte zu liegt.

2. **Schwerpunkt eines Trapezes.** Genau so wie in 1. kann man erkennen, daß der Schwerpunkt eines Trapezes auf der Strecke liegt, welche die Mitten E und F der beiden Grundlinien, d. h. der beiden parallelen Seiten, verbindet. Um zu erkennen, wo er auf dieser Strecke EF liegt, wenden wir die Momentengleichung bezüglich der Ebene an, welche die Trapezebene längs BC senkrecht durchschneidet, wo, der Reihe nach, A, B, C, D die Ecken des Trapezes sind, indem AD und BC die parallelen Grundlinien bilden. Die Längen von BC und AD mögen b und d heißen, die Höhe h. Durch Zerlegung der Trapezfläche in die Dreiecke ABC und DAC erhalten wir, da der Inhalt eines Dreiecks das halbe Produkt von Seite und zugehöriger Höhe ist, nach der Momentengleichung:

$$\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{dh}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \left(\frac{bh}{2} + \frac{dh}{2}\right) \cdot \xi ,$$

wo ξ den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von BC bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2d}{b + d},$$

also:

$$h - \xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b + d}{b + d},$$

oder:

$$\frac{\xi}{h - \xi} = \frac{b + 2d}{2b + d}.$$

In demselben Verhältnis $b + 2d$ zu $2b + d$ muß also auch der gesuchte Schwerpunkt die Verbindungsstrecke EF der Halbierungspunkte der Grundlinien teilen.

3. **Schwerpunkt eines allgemeinen Vierecks.** Nach dem ersten Hauptsatze in § 2 liegt der Schwerpunkt eines Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ auf der Verbindungslinie der nach 1. durch Ziehen der Transversalen auffindbaren Schwerpunkte S_4 und S_2 der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_1 A_4 A_3$, und ebenso auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte S_3 und S_1 der Dreiecke $A_1 A_2 A_4$ und $A_2 A_3 A_4$. Folglich muß der Schwerpunkt des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ der Schnittpunkt S von $S_2 S_4$ und $S_3 S_1$ sein. Zur Auffindung des Schwerpunktes eines allgemeinen Vierecks durch Zeichnung hat man also nur dreierlei zu tun, Strecken zu halbieren, gerade Verbindungsstrecken bekannter Punkte

zu ziehen und Schnittpunkte bekannter gerader Linien aufzusuchen. (Vgl. Fig. 9.)

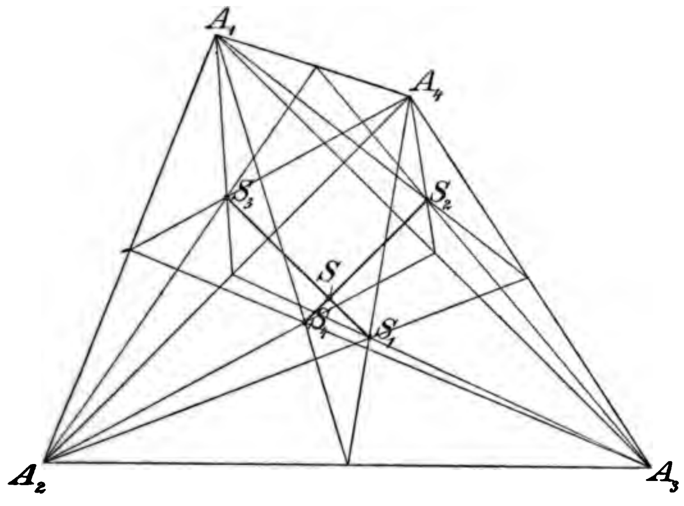


Fig. 9.

4. Schwerpunkt eines allgemeinen Polygons. Ein beliebiges Fünfeck läßt sich auf fünffache Weise durch eine Diagonale in ein Viereck und ein Dreieck zerlegen. Sucht man also nach 3. den Schwerpunkt eines solchen Vierecks auf und nach 1. den Schwerpunkt des zugehörigen Dreiecks, so erhält man durch die Verbindungslinie der beiden so aufgesuchten Schwerpunkte einen Ort für den gesuchten Schwerpunkt S des Fünfecks. Man kann demnach fünf gerade Linien

finden, die sich sämtlich in dem einzigen Punkte S, dem gesuchten Schwerpunkte, schneiden. (Vgl. Fig. 10.)

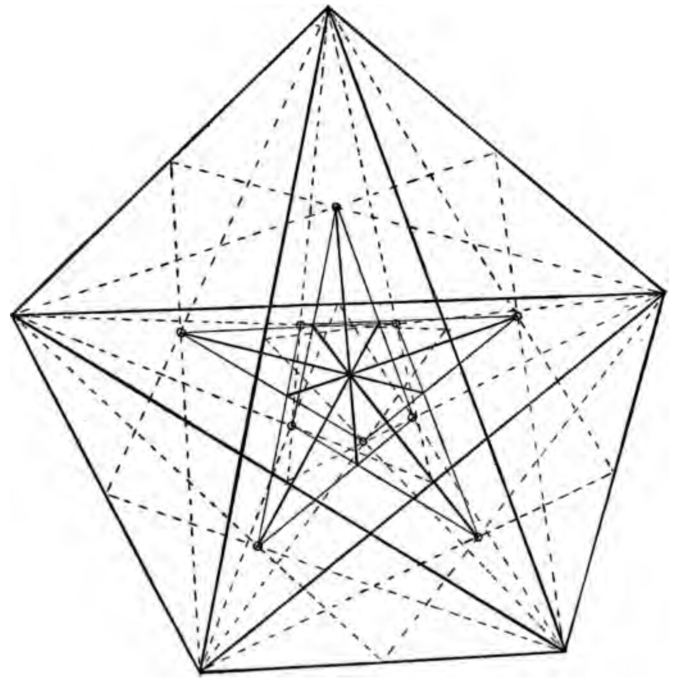


Fig. 10.

Ein beliebiges Sechseck zerfällt durch Diagonalen auf sechsfache Weise in ein Fünfeck und ein Dreieck, so daß man durch Verbindung des nach dem Obigen gezeichneten Schwerpunktes eines solchen Fünfecks

mit dem Schwerpunkte des zugehörigen Dreiecks sechs gerade Linien erhält, die sich in einem einzigen Punkte, dem Schwerpunkte des Sechsecks, treffen. So kann man weitergehend den Schwerpunkt jedes beliebigen von geraden Linien begrenzten Teiles einer Ebene durch Zeichnung gewinnen, indem man, ordnungsmäßig verfahrend, nichts weiter zu tun hat, als Strecken zu halbieren, gerade Verbindungslinien zwischen zwei Punkten zu ziehen und Schnittpunkte von zwei geraden Linien aufzusuchen.

5. **Schwerpunkt eines Kreissektors.** Die Lage des Schwerpunktes eines Kreissektors kann man auch ohne die in § 2 durch die Integralrechnung gebotenen Hilfsmittel aus der in § 3, 3 abgeleiteten Bestimmung des Schwerpunktes eines Kreisbogens ableiten. Zerlegt man nämlich einen Kreissektor durch Radien nach den Punkten des zugehörigen Bogens in Sektoren mit unendlich kleinem Zentriwinkel, so können diese als unendlich kleine kongruente Dreiecke angesehen werden, so daß ihre Schwerpunkte auf dem Kreisbogen liegen müssen, der um das Zentrum O mit zwei Drittel des Radius gezogen werden kann. Wegen der Kongruenz der unendlich kleinen Sektoren erscheinen diese Schwerpunkte sämtlich gleich belastet, so daß der gesuchte Schwerpunkt des Sektors mit dem Schwerpunkte dieses Bogens identisch sein muß, der den Radius $\frac{2}{3}r$, die Länge $\frac{2}{3}c$ und die Sehne $\frac{2}{3}b$ hat, wo r den Radius, c den Bogen, b die Sehne des

Kreissektors bedeuten. Folglich muß der Schwerpunkt eines Kreissektors auf der Halbierungslinie des Zentriwinkels und auf dieser in einer Entfernung vom Zentrum liegen, die gleich:

$$\frac{2}{3} r \cdot \frac{\frac{2}{3} h}{\frac{2}{3} c} = \frac{2 r b}{3 c}$$

ist. Je nachdem der Zentriwinkel des Sektors 180°, 120°, 90°, 60° beträgt, erhält man für diese Entfernung vom Zentrum:

$$\frac{2 r \cdot 2 r}{3 \cdot r \pi} = \frac{4 r}{3 \pi} = r \cdot \frac{14}{33},$$

$$\frac{2 r \cdot r \sqrt{3}}{3 \cdot \frac{2}{3} r \pi} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{\pi} = r \cdot \frac{49}{88},$$

$$\frac{2 r \cdot r \sqrt{2}}{3 \cdot \frac{1}{2} r \pi} = \frac{4 r \sqrt{2}}{3 \pi} = r \cdot \frac{98}{165},$$

$$\frac{2 r \cdot r}{3 \cdot \frac{1}{3} r \pi} = \frac{2 r}{\pi} = r \cdot \frac{7}{11},$$

wo, abgerundet, $\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ gesetzt ist.

6. **Schwerpunkt eines Kreissegmentes.** Da ein Kreissegment die Differenz zwischen dem zugehörigen Sektor und dem Dreiecke ist, dessen Seiten die Sehne b und zwei Radien sind, so findet man die Lage des gesuchten Schwerpunktes am einfachsten durch die Momentengleichung. Es mögen r, b, c dieselbe Bedeutung wie in 5. haben, ferner möge ϱ das

Lot sein, das vom Kreiszentrum zum Halbierungspunkte der Sehne b geht, S der Inhalt des Segmentes, ξ der Abstand seines Schwerpunktes vom Zentrum. Dann liefert die Momentengleichung:

$$\xi \cdot S = \frac{c \cdot r}{2} \cdot \frac{2rb}{3c} - \frac{b \cdot \varrho}{2} \cdot \frac{2}{3} \varrho$$

$$= \frac{b}{3}(r^2 - \varrho^2) = \frac{b}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{12} .$$

Demnach ist

$$\xi = \frac{b^3}{12 \cdot S} ,$$

wo noch für S die Differenz des Inhaltes des Sektors und des Inhaltes des Dreieckes, also $\frac{c \cdot r}{2} - \frac{b \cdot \varrho}{2}$, zu setzen ist.

7. **Schwerpunkt eines geraden Parallelschnittes,** d. h. eines Trapezes, dessen parallele Grundlinien die Ordinaten y_1 und y_2 zweier Punkte sind und dessen Schenkel der gerade Abstand dieser beiden Punkte und die Differenz $x_2 - x_1$ ihrer Abszissen sind. Obwohl der gerade Parallelschnitt ein Trapez ist und deshalb nach 2. behandelt werden kann, wird er hier deshalb besonders besprochen, weil er bei jeder beliebigen Kurve vom Parallelschnitte dieser Kurve zu subtrahieren ist oder umgekehrt, um ein Segment dieser Kurve zu ergeben, und weil im Parallelschnitte einer Kurve die zufällige Wahl des Koordinatenkreuzes mit enthalten ist, während ein

Kurvensegment, als Flächenstück zwischen einem Bogen und der zugehörigen Sehne, von der Wahl des Koordinatenkreuzes unabhängig ist. Auf den oben definierten Parallelschnitt bezieht sich das Formelpaar (V) in § 2. Die Entfernungen ξ_t und η_t des Schwerpunktes eines geraden Parallelschnittes von den beiden Koordinatenachsen ergeben sich am einfachsten durch Zerlegung des geraden Parallelschnittes in ein Rechteck, dessen Seiten y_1 und $x_2 - x_1$ sind, und in ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ sind. Die Momentengleichung, angewandt auf diese beiden Teile des geraden Parallelschnittes und auf die Ebene, welche in der Y-Achse auf der Ebene der Figur senkrecht steht, ergibt:

$$\xi_t \cdot \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{x_2 + x_1}{2} \cdot y_1 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$+ [x_2 - \tfrac{1}{3}(x_2 - x_1)] \cdot \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{6}[3x_2y_1 + 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_1]$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{6}[x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2],$$

woraus folgt:

$$\xi_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2(x_1 + 2x_2) + y_1(x_2 + 2x_1)}{y_2 + y_1}.$$

Analog ergibt sich:

$$\eta_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2}{y_2 + y_1}.$$

Demnach sind die Momente selbst:

$$\begin{cases} \xi_t \cdot J_t = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)[x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_1 y_1 + 2 x_2 y_2] \\ \eta_t \cdot J_t = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)[y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2] . \end{cases}$$

8. **Schwerpunkt eines Parallelschnittes einer Parabel.** Die Gleichung einer Parabel, deren Achse die X-Achse ist, und deren Scheitel der Nullpunkt der Koordinaten ist, lautet $y^2 = 2px$, so daß der Inhalt des Parallelschnittes sich ergibt aus:

$$J_p = \int y\, dx = \int \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p} \cdot \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \sqrt{2p} \cdot \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x y ,$$

so daß, wenn die parallelen Ordinaten y_2 und y_1 sind:

$$J_p = \tfrac{2}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1)$$

wird. Nach Formel (V) in § 2 haben wir nun, um den Abstand η_p des Parallelschnittes der Parabel von der X-Achse zu bestimmen, $\int \frac{y^2}{2} dx$ auszuführen. Wegen $y^2 = 2px$ dürfen wir dx durch $\frac{y\,dy}{p}$ ersetzen und erhalten so:

$$\int \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{p} \int \frac{y^3}{2} dy = \frac{y^4}{8p} ,$$

also, durch Einsetzen der Grenzen y_2 und y_1:

$$J_p \cdot \eta_p = \frac{y_2^4 - y_1^4}{8p} = \left(\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}\right) \frac{y_2^2 + y_1^2}{4}$$
$$= \tfrac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2^2 + y_1^2) .$$

Durch Einsetzen des oben bestimmten Ausdruckes für J_p ergibt sich nun:

$$\eta_p = \frac{3}{8} \cdot \frac{(x_2 - x_1)(y_2^2 + y_1^2)}{x_2 y_2 - x_1 y_1} .$$

Es liegt nahe, den Abstand η_p nur durch die Ordinaten y_2 und y_1 auszudrücken. Dann hat man x_2 durch $\frac{y_2^2}{2p}$ und x_1 durch $\frac{y_1^2}{2p}$ zu ersetzen, und es ergibt sich:

$$\eta_p = \frac{3}{8} \cdot \frac{y_2^4 - y_1^4}{y_2^3 - y_1^3} = \frac{3}{8} \frac{y_2^3 + y_2^2 y_1 + y_2 y_1^2 + y_1^3}{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2} .$$

Um nun auch den Abstand ξ_p des gesuchten Schwerpunktes von der Ordinatenachse zu finden, haben wir im Integrale:

$$\int x y \, dx = \int x \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \sqrt{2p} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}$$
$$= \tfrac{2}{5} \sqrt{2px} \cdot x^2 = \tfrac{2}{5} x^2 y$$

die Grenzen einzusetzen, so daß kommt:

$$\xi_p \cdot J_p = \tfrac{2}{5} (x_2^2 y_2 - x_1^2 y_1) ,$$

oder, wenn wir wieder wegen der Parabelgleichung $y^2 = 2px$ x durch y ausdrücken:

$$\xi_p \cdot J_p = \frac{y_2^5 - y_1^5}{10 p^2} .$$

Wenn wir nun auch in den oben berechneten Ausdruck für J_p y_2 und y_1 einführen, also

$$J_p = \frac{y_2^3 - y_1^3}{3p}$$

setzen, erhalten wir:

$$\xi_p = \frac{3}{10} \cdot \frac{y_2^5 - y_1^5}{p\,(y_2^3 - y_1^3)} \,.$$

Wenn wir spezieller in den für η_p und ξ_p erhaltenen Ausdrücken y_1 gleich Null setzen, erhalten wir:

$$\eta_p = \frac{3}{8} \cdot y_2 \quad \text{und} \quad \xi_p = \frac{3}{10} \cdot \frac{y_2^2}{p} = \frac{3}{5} x_2 \,.$$

Hiernach findet man also den Schwerpunkt des Flächenstückes, das von einer Abszisse x_2, der zugehörigen Ordinate y_2 und dem Parabelbogen vom Scheitel bis zum zugehörigen Punkte begrenzt wird, indem man von x_2 drei Fünftel, von y_2 drei Achtel abschneidet und durch die erhaltenen Abschneidungsendpunkte senkrecht und parallel zur Achse gerade Linien legt. Der Schnittpunkt derselben ist der gewünschte *S*chwerpunkt.

9. **Schwerpunkt eines beliebigen Parabelsegmentes.** Auch für ein Parabelsegment, dessen Definition ja von der Wahl des Koordinatenkreuzes unabhängig ist, läßt sich die Lage des Schwerpunktes sehr einfach ermitteln und konstruieren. Man hat ja nur das in 8. bestimmte statische Moment des Parabel-Parallelschnittes um das in 7. ermittelte statische Moment des geraden Parallelschnittes zu vermindern, um das Moment des Parabelsegmentes zu erhalten. So ergibt sich:

$$J_s \cdot \eta_s = J_p \cdot \eta_p - J_t \cdot \eta_t$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{4} \cdot (y_2^2 + y_1^2) - \frac{x_2 - x_1}{6} (y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{12} (3 y_2^2 + 3 y_1^2 - 2 y_2^2 - 2 y_1^2 - 2 y_2 y_1)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{12} \cdot (y_2 - y_1)^2 .$$

Ebenso ergibt sich das andere statische Moment $J_s \cdot \xi_s$ aus:

$$J_s \cdot \xi_s = J_p \cdot \xi_p - J_t \cdot \xi_t$$

$$= \frac{y_2^5 - y_1^5}{10 p^2} - \frac{1}{6} (x_2 - x_1) [x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_1 y_1 + 2 x_2 y_2] ,$$

oder, wenn wir wieder x_1 durch $\frac{y_1^2}{2p}$ und x_2 durch $\frac{y_2^2}{2p}$ ersetzen:

$$J_s \cdot \xi_s = \frac{y_2^5 - y_1^5}{10 p^2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{24 p^2} \cdot (y_2 + y_1) (2 y_2^2 - y_2 y_1 + 2 y_1^2)$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{120 p^2} \cdot [2 y_2^4 - 3 y_1^3 y_2 + 2 y_2^2 y_1^2 - 3 y_1 y_2^3 + 2 y_1^4]$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)^3}{120 p^2} \cdot [2 y_2^2 + y_2 y_1 + 2 y_1^2] .$$

Nachdem wir die beiden statischen Momente des Parabelsegmentes, nämlich $J_s \cdot \eta_s$ und $J_s \cdot \xi_s$ berechnet haben, liegt es uns ob, auch den Inhalt J_s des Parabel-

segmentes durch y_2 und y_1 auszudrücken. Wir erhalten:

$$J_s = J_p - J_t = \frac{2}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1) - \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot (y_2 + y_1)$$

$$= \frac{1}{3p}(y_2^3 - y_1^3) - \frac{y_2^2 - y_1^2}{4p}(y_2 + y_1)$$

$$= \frac{1}{12p}[4 y_2^3 - 4 y_1^3 - 3 y_2^3 + 3 y_1^3 - 3 y_2^2 y_1 + 3 y_2 y_1^2]$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}.$$

Durch Einsetzen dieses Resultates für J_s kommt nun:

$$\eta_s = \frac{x_2 - x_1}{12} \cdot (y_2 - y_1)^2 \cdot \frac{12p}{(y_2 - y_1)^3} = \frac{(x_2 - x_1)p}{y_2 - y_1},$$

oder, wenn wir $p x_1$ durch $\frac{1}{2} y_1^2$ und $p x_2$ durch $\frac{1}{2} y_2^2$ ersetzen:

$$\eta_s = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1).$$

Für ξ_s erhält man analog:

$$\xi_s = \frac{(y_2 - y_1)^3}{120 p^2}[2 y_2^2 + y_2 y_1 + 2 y_1^2] \cdot \frac{12p}{(y_2 - y_1)^3}$$

$$= \frac{2 y_2^2 + y_2 y_1 + 2 y_1^2}{10p}.$$

Da η_s durch y_2 und y_1 ausgedrückt war, so liegt es nahe, ξ_s durch x_2 und x_1 auszudrücken, indem man $y_2 = \sqrt{2 p x_2}$ und $y_1 = \sqrt{2 p x_1}$ setzt. Dadurch erhält man:

$$\xi_s = \tfrac{2}{5} \cdot \left(x_2 + x_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}\right).$$

Die für η_s und ξ_s erhaltenen Resultate ergeben nun eine sehr einfache Konstruktion des Schwerpunktes eines Parabelsegmentes, allein durch dessen Sehne, dessen Bogen und der Richtung der Parabelachse, welche Richtung auch durch die Verbindung des Halbierungspunktes der Sehne mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten bestimmt ist, die in den Endpunkten der Sehne gezogen werden können. Aus den Gleichungen dieser beiden Tangenten

$$\begin{cases} y\,y_1 = p\,(x + x_1) \\ y\,y_2 = p\,(x + x_2) \end{cases}$$

erhält man nämlich die Koordinaten x, y ihres Schnittpunktes, nämlich durch Subtraktion:

$$y = \frac{p\,x_2 - p\,x_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{y_2 - y_1} = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)\,,$$

und durch Addition:

$$x = \frac{y\,(y_2 + y_1) - p\,(x_2 + x_1)}{2\,p}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(y_2 + y_1)^2 - p\,x_2 - p\,x_1}{2\,p} = \frac{y_2\,y_1}{2\,p}$$

oder:

$$x = \frac{\sqrt{2\,p\,x_2} \cdot \sqrt{2\,p\,x_1}}{2\,p} = \sqrt{x_2\,x_1}\,.$$

Aus der Übereinstimmung des Resultates für y und des für η_s geht hervor, daß der gesuchte Schwerpunkt auf der durch den Tangentenschnittpunkt zur Achse parallel gezogenen Geraden liegt, und daraus, daß dieses Resultat $\frac{1}{2}(y_2 + y_1)$ heißt, geht hervor,

daß diese Parallele auch die Sehne halbiert. Überdies schneidet sie die Parabel in der Mitte zwischen dem

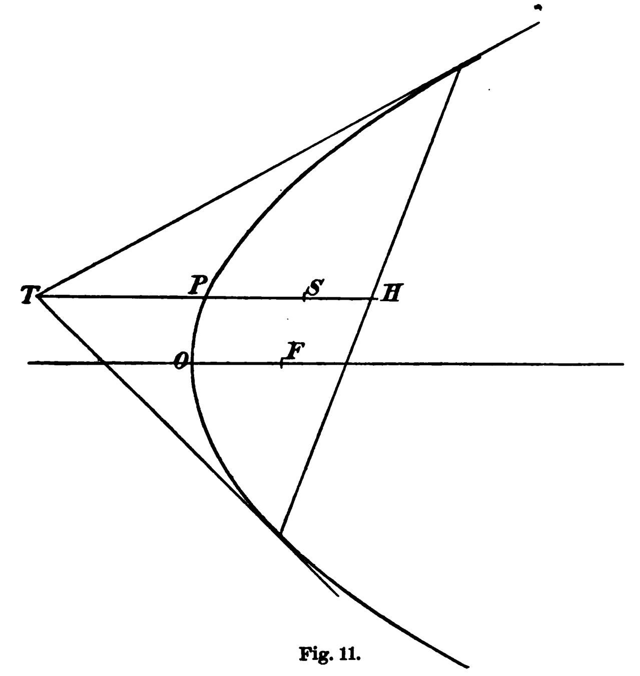


Fig. 11.

Tangentenschnittpunkte und dem Sehnenhalbierungspunkte. Denn:

$$\left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)^2 = 2px$$

führt wegen der Parabelgleichung auf:

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{x_2 + x_1}{2} + \sqrt{x_2 x_1}\right].$$

Die genannte Parallele enthält also der Reihe nach die folgenden vier Punkte: erstens den Schnittpunkt T der Tangenten in den Endpunkten der Sehne, zweitens den Schnittpunkt P mit der Parabel, der zugleich Halbierungspunkt von TH ist, drittens den Schwerpunkt S des Parabelsegmentes, viertens den Halbierungspunkt H der Sehne. Um nun auch zu erkennen, wo S zwischen P und H liegt, bestimmen wir zunächst die Länge von PH, für die sich ergibt:

$$PH = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x_2 + x_1}{2} + \sqrt{x_2 x_1}\right]$$

$$= \frac{x_2 + x_1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$SP = \xi_s - \frac{1}{2}\left[\frac{x_2 + x_1}{2} + \sqrt{x_2 x_1}\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left(x_2 + x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}\right) - \frac{1}{4}(x_2 + x_1) - \frac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}$$

$$= \frac{3}{20}(x_2 + x_1) - \frac{3}{10}\sqrt{x_2 x_1} = \frac{3}{5}\left[\frac{x_2 + x_1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}\right].$$

Demnach ist $SP = \frac{3}{5} \cdot PH$. Zur Bestätigung berechnen wir auch

$$SH = \frac{x_2 + x_1}{2} - \xi_s = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{2}{5}(x_2 + x_1) - \frac{1}{5}\sqrt{x_2 x_1}$$

$$= \frac{x_2 + x_1}{10} - \frac{1}{5}\sqrt{x_2 x_1} = \frac{2}{5}\left[\frac{x_2 + x_1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{x_2 x_1}\right]$$

$$= \tfrac{2}{5}\,PH\,.$$

Hiermit ist bewiesen, daß der gesuchte Schwerpunkt S die Strecke PH im Verhältnis 3 zu 2 teilt. Um also den Schwerpunkt eines beliebigen Parabelsegmentes zu finden, hat man nur durch den Halbierungspunkt H seiner Sehne die Parallele zur Parabelachse zu ziehen, welche die Parabel in P schneidet, und dann PH im Verhältnis 3 zu 2 zu teilen, so daß nach P hin der größere, nach H hin der kleinere Teil liegt. Der Teilungspunkt ist der gesuchte Schwerpunkt.

10. **Schwerpunkt eines Ellipsen-Parallelschnittes.** Wenn man von zwei beliebigen Punkten einer Ellipse die Lote auf deren große Achse fällt, so begrenzen der Bogen zwischen diesen beiden Punkten, die beiden Lote und die Strecke zwischen deren Fußpunkten ein Flächenstück, dessen Inhalt und dessen Schwerpunkt zu bestimmen sind. Aus $J = \int y\, dx$ ergibt sich hier:

$$J = \int \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \cdot \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a},$$

und nach Einsetzung der Grenzen für die beiden

Punkte, deren Koordinaten x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 sind:

$$J = \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right).$$

Als Beispiel diene $x_1 = 0$, $y_1 = b$ und $x_2 = a$, $y_2 = 0$. Dann ergibt sich für den Inhalt des Ellipsenquadranten:

$$\frac{ab}{2}\arcsin 1 = \frac{ab\pi}{4}.$$

Wir setzen zweitens $x_1 = 0$, $y_1 = b$, $x_2 = \frac{a}{2}$, $y_2 = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ und erhalten dadurch für denjenigen Teil des Ellipsenquadranten, der zwischen der kleinen Halbachse b und dem Lote im Halbierungspunkte der großen Halbachse liegt:

$$J_1 = \frac{ab}{8}\sqrt{3} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{1}{2} = ab\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right).$$

Um auch den anderen Teil der Fläche des Ellipsenquadranten zu berechnen, setzen wir $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$ und erhalten:

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{ab}{8}\sqrt{3} + \frac{ab}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{ab}{8}\sqrt{3} + \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{ab}{8}\sqrt{3} + \frac{ab\pi}{6} = ab\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right). \end{aligned}$$

Um nun auch die Lage des Schwerpunktes eines Ellipsen-Parallelschnittes zu bestimmen, haben wir $\int x\,y\,dx$ auszuführen und erhalten:

$$\int \frac{b\,x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{b}{2\,a}\cdot\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{b}{3\,a}\cdot\frac{a\,y}{b}\cdot\frac{a^2\,y^2}{b^2} = -\frac{a^2\,y^3}{b^2}\,,$$

so daß sich nach Einsetzung der Grenzen ergibt:

$$\xi\cdot J = -\frac{a^2}{3\,b^2}(y_2^3 - y_1^3)\,.$$

Demnach ist:

$$\xi = \frac{-2\,a^2\,(y_2^3 - y_1^3)}{3\,b^2\,(x_2\,y_2 - x_1\,y_1) + 3\,a\,b^3\left(\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right)}\,.$$

Um auch den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von der großen Achse der Ellipse zu finden, haben wir $\int \frac{y^2}{2}\,dx$ auszuführen, wodurch wir erhalten:

$$\eta\cdot J = \frac{1}{2}\int dx\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2\,x}{2} - \frac{b^2\,x^3}{6\,a^2}\,,$$

und, nach Einsetzung der Grenzen:

$$\eta\cdot J = \frac{b^2}{2}(x_2 - x_1) - \frac{b^2}{6\,a^2}(x_2^3 - x_1^3)\,,$$

also:

$$\eta = \frac{b^2\,(x_2 - x_1)\cdot 3\,a^2 - b^2\,(x_2^3 - x_1^3)}{3\,a^2\,(x_2\,y_2 - x_1\,y_1) + 3\,a^3\,b\left(\arcsin\frac{x_2}{a} - \arcsin\frac{x_1}{a}\right)}\,.$$

Als Beispiele berechnen wir die Lage der Schwerpunkte der drei Flächen, deren Inhalte oben berechnet sind. Wir erhalten:

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}$$

für den Ellipsenquadranten. Für $a = b = r$ erhält man in Übereinstimmung mit 5. die Lage des Schwerpunktes des Kreisquadranten. Für den Schwerpunkt desjenigen Teiles des Ellipsenquadranten, dessen Inhalt oben J_1 genannt ist, ergibt sich:

$$\xi_1 = a \frac{8 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 2\pi}, \quad \eta_1 = b \cdot \frac{11}{6\sqrt{3} + 4\pi}.$$

Der andere Teil des Ellipsenquadranten, dessen Inhalt oben J_2 genannt ist, hat einen Schwerpunkt, dessen Lage sich ergibt aus:

$$\xi_2 = a \frac{3\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}, \quad \eta_2 = b \cdot \frac{5}{8\pi - 6\sqrt{3}}.$$

Eine Bestätigung der Berechnungen ergibt sich daraus, daß:

$$J = J_1 + J_2, \quad J \cdot \xi = J_1 \cdot \xi_1 + J_2 \cdot \xi_2,$$

$$J \cdot \eta = J_1 \cdot \eta_1 + J_2 \cdot \eta_2$$

ist. Für ein Ellipsensegment läßt sich Inhalt und Schwerpunktslage in derselben Weise berechnen, wie es oben für ein Parabelsegment geschehen ist.

11. **Schwerpunkt eines Segmentes der gleichseitigen Hyperbel.** Wenn man die Gleichung der

Hyperbel auf ihre beiden Achsen bezieht, ist die Behandlung derselben ganz analog der in 10. besprochenen Behandlung der Ellipse. Deshalb besprechen wir hier die auf ihre zueinander rechtwinkligen Asymptoten bezogene gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung lautet:

$$x y = a^2 ,$$

wo a den Abstand ihrer beiden Scheitel von den Asymptoten bedeutet. Zunächst erhalten wir für den Inhalt J_h eines Parallelschnittes zwischen den Ordinaten y_1 und y_2, wenn x_1 und x_2 die zugehörigen Abszissen sind:

$$J_h = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2 \, dx}{x} = a^2 (l x_2 - l x_1) .$$

Durch Subtraktion des in 7. behandelten Parallelschnittes J_t erhalten wir für den Inhalt des Hyperbelsegmentes:

$$J_s = \tfrac{1}{2} (x_2 - x)(y_2 + y_1) - a^2 (l x_2 - l x_1) .$$

Um auch die Lage des Schwerpunktes bestimmen zu können, haben wir die Integrale:

$$\int x \cdot y \, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{y^2}{2} dx$$

auszuführen. Wir erhalten:

$$a^2 x \quad \text{bzw.} \quad -\frac{a^4}{2 x} ,$$

so daß, innerhalb der eingeführten Grenzen, die beiden Momente des Hyperbelparallelschnittes werden:

$$\xi_h \cdot J_h = a^2 (x_2 - x_1)$$

und:

$$\eta_h \cdot J_h = -\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{a^4}{2\,x_1\,x_2} \cdot (x_2 - x_1) .$$

Diese beiden Momente haben wir noch von den in 7. berechneten Momenten des geraden Parallelschnittes zu subtrahieren, um die Momente eines beliebigen Hyperbelsegmentes zu erhalten. Dividiert man endlich die so berechneten Momente durch den oben berechneten Inhalt J_s, so erhält man die Abstände des Schwerpunktes des zwischen den Punkten x_1, y_1 und x_2, y_2 liegenden Hyperbelsegmentes von den beiden Asymptoten. Es wird genügen, wenn wir dies an einem Beispiel zeigen. Wir wählen dieses Beispiel so, daß das Segment von der Halbierungslinie des Winkels zwischen den Asymptoten halbiert wird, indem wir $x_1 = \frac{a}{3}$, $x_2 = 3\,a$ und deshalb $y_1 = 3\,a$, $y_2 = \frac{a}{3}$ setzen. Dann wird:

$$J_1 = \tfrac{40}{9}\,a^2 - 2\,a^2\,l\,3 ,$$

$$J_h \cdot \xi_h = \tfrac{8}{3}\,a^3 \quad \text{und} \quad J_h \cdot \eta_h = \tfrac{4}{3}\,a^3 .$$

Für die Momente des in 7. behandelten geraden Parallelschnittes erhält man:

$$J_t \cdot \xi_t = \tfrac{4}{9}\,a^3 (9 + \tfrac{1}{9} + 2 + 2) = \tfrac{472}{81}\,a^3$$

$$J_t \cdot \eta_t = \tfrac{4}{9}\,a^3 (9 + 1 + \tfrac{1}{9}) = \tfrac{364}{81}\,a^3 .$$

Deshalb ergibt sich:

$$J_s \cdot \xi_s = J_t \cdot \xi_t - J_k \cdot \xi_k = \tfrac{472}{81} a^3 - \tfrac{8}{3} a^3 = \tfrac{256}{81} a^3$$

$$J_s \cdot \eta_s = J_t \cdot \eta_t - J_k \cdot \eta_k = \tfrac{364}{81} a^3 - \tfrac{4}{3} a^3 = \tfrac{256}{81} a^3 .$$

Daß auf verschiedenen Wegen für die beiden Momente dasselbe Resultat erscheint, hat seinen Grund in der symmetrischen Lage des als Beispiel gewählten Segmentes und liefert eine Bestätigung der Berechnung. Für die Abstände des gesuchten Schwerpunktes von den beiden Asymptoten erhält man schließlich:

$$\xi_s = \eta_s = a \cdot \frac{128}{180 - 81\, l\, 3} .$$

12. **Schwerpunkt einer Zykloidenfläche.** Die bezüglich eines beliebigen Bogens schon in § 3, 8 behandelte Zykloide ist bestimmt durch das Gleichungspaar:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right\},$$

wo a den Radius des auf der Strecke $2a\pi$ rollenden Kreises bedeutet und wo t der Wälzungswinkel ist. Um den Inhalt eines beliebigen Parallelschnittes zu bestimmen, haben wir $\int y\, dx$ auszuführen und erhalten:

$$\begin{aligned} J &= \int a^2 dt (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \\ &= a^2 t - 2a^2 \sin t + a^2 (\tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{4} \sin 2t) , \end{aligned}$$

also, nach Einführung der Grenzen:

$$J = a^2 \left[\tfrac{3}{2} t - 2 \sin t + \tfrac{1}{4} \sin 2t\right]_{t_1}^{t_2} .$$

Der Inhalt der ganzen Zykloide entsteht, wenn die ganze Peripherie des rollenden Kreises einmal abgerollt ist, wenn wir also $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$ setzen, wodurch sich $J = 3\,a^2\pi$ ergibt. Da die Zykloide bezüglich des Lotes im Halbierungspunkte der Strecke $2 \cdot a \cdot \pi$ symmetrisch liegt, so ergibt sich von $t = 0$ bis $t = \pi$ die Hälfte von $3\,a^2\pi$. Um auch den Schwerpunkt eines Parallelschnittes bestimmen zu können, haben wir $\int x\,y\,dx$ und $\int \frac{y^2}{2}\,dx$ auszuführen, wodurch wir zuerst erhalten:

$$\xi \cdot J = a^3 \cdot \int dt\,(t - 2\,t\cos t + t\cos^2 t - \sin t - 2\sin t\cos t + \sin t\cos^2 t) = a^3\left[\tfrac{3}{4}t^2 - 2\,t\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2\,\mathrm{t} - \cos t - \tfrac{3}{8}\cos 2\,t + \tfrac{1}{3}\cos^3 t\right].$$

Demnach ist der Abstand ξ des Schwerpunktes eines zwischen den Ordinaten y_1 und y_2 liegenden Parallelschnittes berechenbar aus:

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\left[\frac{3}{4}t^2 - 2\,t\sin t + \frac{1}{4}\sin 2\,t - \cos t - \frac{3}{8}\cos 2\,t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{t_1}^{t_2}}{\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2\,t\right]_{t_1}^{t_2}}$$

Für $t_1 = 0$ und $t_2 = 2\,\pi$ ergibt sich $\xi_1 = a\,\pi$, was man wegen der symmetrischen Lage von vornherein wissen konnte. Wenn man zweitens $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi$ setzt, erhält man, da dann, wie schon oben berechnet ist, der Inhalt $\frac{3}{2}a^2\pi$ wird:

$$\xi = a\,\frac{\frac{3}{4}\pi^2 + \frac{4}{3}}{\frac{3}{2}\pi} = a \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{9\,\pi}\right).$$

Für $\int \frac{y^2}{2} dx$ kommt:

$$\eta \cdot J = \frac{a^3}{2} \int (1 - \cos t)^3 \, dt$$

$$= \frac{a^3}{2} \int dt \, [1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos t \, (1 - \sin^2 t)]$$

$$= \frac{a^3}{2} \left[t - 3 \sin t + 3 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\,t \right) - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]$$

$$= \frac{a^3}{2} \left[\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2\,t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right],$$

so daß wir den Abstand von der Strecke, auf der die Abrollung stattfindet, erhalten aus:

$$\frac{\eta}{a} = \frac{[\frac{5}{4} t - 2 \sin t + \frac{3}{8} \sin 2\,t + \frac{1}{6} \sin^3 t]_{t_1}^{t_2}}{\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2\,t]_{t_1}^{t_2}}.$$

Hieraus ergibt sich für $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, also für die ganze Zykloidenfläche:

$$\eta = \tfrac{5}{6} a .$$

Daß auch für jede der beiden durch die Symmetrieachse getrennten Hälften sich derselbe Schwerpunktsabstand $\frac{5}{6} a$ ergibt, liefert eine Bestätigung. Überhaupt kann man die für $\frac{\xi}{a}$ und für $\frac{\eta}{a}$ erhaltenen Resultate dadurch verifizieren, daß man von $t = 0$ bis $t = t$ bei J und bei η dasselbe Resultat erhält, wie wenn man $2\pi - t$ und 2π als Grenzen nimmt, daß aber die beiden bei ξ erhaltenen Resul-

tate zusammen die Hälfte $a \cdot \pi$ der Strecke $2a\pi$ ergeben, auf der der Kreis abrollt.

13. **Schwerpunkt einer Astroidenfläche.** Wenn der größere Kreis einen $(m+1)$-mal so großen Radius a hat, als der ihn von innen berührende Kreis, so beschreibt ein Punkt dieses kleineren Kreises, dessen Radius b sei, durch Abrollen innerhalb des größeren Kreises eine Hypozykloide mit den Gleichungen:

$$x = b(m\cos t + \cos m t)$$
$$y = b(m\sin t - \sin m t),$$

wenn t der Wälzungswinkel ist. Für $m = 3$ ergibt sich daraus durch Anwendung trigonometrischer Formeln und durch Setzen von a statt $4b$ das Gleichungspaar derjenigen Hypozykloide, die man Astroide nennt, nämlich:

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t.$$

Diese Kurve hat vier Spitzen, für $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = 2\pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, und zerfällt demnach in vier Quadranten. Um deren Inhalt J zu finden, haben wir

$$\int y\,dx = \int a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$
$$= -3a^2\int \sin^4 t\,dt + 3a^2\int \sin^6 t\,dt,$$

und zwar von $x = 0$ bis $x = a$, d. h. von $t = \frac{\pi}{2}$ bis $t = 0$. Demnach ist der Inhalt eines Astroidenquadranten bestimmt durch:

$$J = 3a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt - 3a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,dt.$$

Die beiden Integrale lassen sich entweder durch die bekannte Rekursionsformel ausführen, bei welcher der Exponent von $\sin t$ immer um zwei Einheiten verringert wird, oder durch Einführung der Kosinusse der Vielfachen von t. Wir wählen den letztgenannten Weg, auf dem wir finden:

$$J = 3\,a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{8} \cdot (\cos 4\,t - 4\cos 2\,t + 3)\,dt$$

$$+ 3\,a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{32} \cdot (\cos^6 t - 6\cos 4\,t + 15\cos 2\,t - 10)\,dt\,.$$

Da die Integrale der Kosinusse der geraden Vielfachen von t zu den Sinussen dieser Vielfachen führen, so reduziert sich durch Einsetzung der Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ das erste Integral auf $\frac{3}{8}$, das zweite auf $\frac{10}{32}$, und zwar mal $\frac{\pi}{2}$, so daß kommt:

$$J = 3\,a^2 \left(\frac{3}{8} - \frac{10}{32}\right) \frac{\pi}{2} = 3\,a^2 \cdot \frac{\pi}{32}\,.$$

Der Inhalt eines Astroidenquadranten beträgt also $\frac{3}{32}$ vom Inhalt des durch die vier Spitzen gehenden großen Kreises, so daß von der ganzen Fläche dieses Kreises die Astroidenfläche $\frac{3}{8}$ einnimmt.

Um auch die Abstände ξ und η des Schwerpunktes des Astroidenquadranten von den Koordinatenachsen zu berechnen, haben wir $\int y \cdot x\,dy$ und

$\int y \cdot \frac{y}{2} dx$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ auszuführen. So erhalten wir:

$$J \cdot \xi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - 3\, a^3 \cos^5 t \sin^4 t\, dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3\, a^3 \cos^5 t\, (1 - \cos^2 t)^2\, dt$$

oder:

$$\frac{J \cdot \xi}{3\, a^3} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^9 t - 2 \cos^7 t + \cos^5 t)\, dt\,.$$

Wenn wir nun hier die oben bei Berechnung des Inhaltes erwähnte Rekursionsformel anwenden, erhalten wir:

$$\frac{J \cdot \xi}{3\, a^3} = \left[\tfrac{1}{9} \cos^8 t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \tfrac{8}{9} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t\, dt - 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t\, dt$$

$$+ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\, dt = \left[\tfrac{1}{9} \cos^8 t \sin t - \tfrac{10}{9} \int \cos^7 dt + \int \cos^5 t\, dt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Da nun

$$\int \cos^7 t\, dt = \tfrac{1}{7} \cos^6 t \sin t + \tfrac{6}{7} \int \cos^5 t\, dt$$

ist, so kommt nun:

$$\frac{J \cdot \xi}{3\, a^3} = \left[\tfrac{1}{9} \cos^8 t \sin t - \tfrac{10}{63} \cos^6 t \sin t + \tfrac{1}{21} \int \cos^5 t\, dt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Wenn wir nun noch:

$$\int \cos^5 t\, dt = + \tfrac{1}{5} \cos^4 t \sin t + \tfrac{4}{15} \cos^2 t \sin t + \tfrac{8}{15} \sin t$$

einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{J \cdot \xi}{3\,a^3} = \tfrac{1}{9} \cos^8 t \sin t - \tfrac{10}{63} \cos^6 t \sin t + \tfrac{1}{105} \cos^4 t \sin t$$

$$+ \tfrac{4}{315} \cos^2 t \sin t + \tfrac{8}{315} \sin t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{8}{315} \,.$$

Hieraus folgt:

$$\xi = \frac{3\,a^3}{J} \cdot \frac{8}{315} = \frac{8}{105} \cdot a^3 \cdot \frac{32}{3\,a^2\,\pi} = \frac{256}{315\,\pi} \cdot a\,,$$

wo für J der oben gefundene Wert eingesetzt wurde. Um nun auch den anderen Abstand η zu berechnen, haben wir:

$$\eta \cdot J = \tfrac{1}{2} \int y^2\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot a^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\,dt\,(1 - \sin^2 t)$$

auszuführen, wodurch wir erhalten:

$$\frac{2\,\eta \cdot J}{3\,a^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 dt + \left[\tfrac{1}{9} \sin^8 t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \tfrac{8}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\,dt$$

$$= \tfrac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\,dt + \left[\tfrac{1}{9} \sin^8 t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \,.$$

Wenn wir nun nacheinander einsetzen, gemäß den Rekursionsformeln:

$$\int \sin^7 t\,dt = -\tfrac{1}{7} \sin^6 t \cos t + \tfrac{6}{7} \cdot \int \sin^5 t\,dt\,,$$

$$\int \sin^5 t\,dt = -\tfrac{1}{5} \sin^4 t \cos t + \tfrac{4}{5} \cdot \int \sin^3 t\,dt\,,$$

$$\int \sin^3 t\,dt = -\tfrac{1}{3} \sin^2 t \cos t - \tfrac{2}{3} \cos t\,,$$

erhalten wir:

$$\frac{2\eta \cdot J}{3a^3} = \Big[\tfrac{1}{9}\sin^8 t\cos t - \tfrac{1}{63}\sin^6 t\cos t - \tfrac{2}{105}\sin^4 t\cos t$$

$$- \tfrac{8}{315}\sin^2 t\cos t - \tfrac{16}{315}\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = +\tfrac{16}{315}.$$

Demnach ist:

$$\eta \cdot J = \tfrac{8}{105}a^3,$$

woraus, wie oben bei ξ, nach Einsetzung des oben gefundenen Wertes von J folgt:

$$\eta = \frac{8}{105} \cdot a^3 \cdot \frac{32}{3a^3\pi} = \frac{256}{315\pi} \cdot a.$$

Daß $\eta = \xi$ sich ergeben hat, war wegen der Symmetrie des Astroidenquadranten bezüglich der Halbierungslinie seines Zentriwinkels zu erwarten und liefert eine Bestätigung der Berechnung. Es liegt nahe, die gefundene Lage des Schwerpunktes des Astroidenquadranten mit der in 5. gefundenen Lage des Schwerpunktes des umschriebenen Kreisquadranten zu vergleichen. Beide liegen auf der Halbierungslinie des zugehörigen Zentriwinkels, und zwar der Schwerpunkt des Kreisquadranten, wie in 5. gefunden ist, im Abstande:

$$\frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$$

vom Zentrum, und der Schwerpunkt des Astroidenquadranten, wie aus den soeben gefundenen beiden Resultaten für ξ und η hervorgeht, im Abstande

$$\frac{256a\sqrt{2}}{315\pi} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{64}{105}.$$

Demnach haben die Zentralabstände beider Schwerpunkte das rationale Verhältnis 105 zu 64, oder, was dasselbe ist, der Zentralabstand des Schwerpunktes des Kreisquadranten wird vom Schwerpunkte des Astroidenquadranten im Verhältnis 64 zu 41 geteilt.

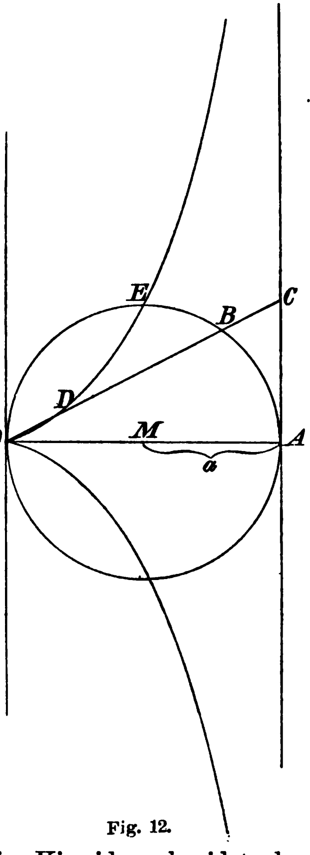


Fig. 12.

14. **Schwerpunkt der Kissoidenfläche.** Wenn man von einem Endpunkte O eines Durchmessers OA eines Kreises einen beliebigen Strahl zieht, der die Kreisperipherie in B und die in A gelegte Tangente in C schneidet, und dann die Strecke OB von C aus nach O hin abträgt bis D, so beschreibt D eine Kissoide, wenn der Strahl OD alle möglichen Winkel φ mit OA bildet. Die Kissoide schneidet den Kreis in dem Halbierungspunkte E des Halbkreises

über OA. Insofern der Winkel φ auch negativ sein kann, besteht die Kissoide aus zwei symmetrischen Hälften, die in O eine Spitze bilden und die Tangente in A zur Asymptote haben. Ist a der Radius des Kreises, so ist die Kissoide bestimmt durch das Gleichungspaar:

$$x = 2\,a \sin^2\varphi \quad \text{und} \quad y = 2\,a \sin^2\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi \,.$$

Was zunächst den Inhalt eines Teiles der Fläche angeht, die zwischen dem Durchmesser OA und der Kissoide liegt, so ergibt sich ein solcher Inhalt aus:

$$\begin{aligned} J &= \int y\,dx = 8\,a^2 \cdot \int \sin^4\varphi\,d\varphi \\ &= 8\,a^2 \left[\tfrac{3}{8}\,\varphi - \tfrac{3}{8} \sin\varphi \cos\varphi - \tfrac{1}{4} \sin^3\varphi \cos\varphi\right]. \end{aligned}$$

Da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ der Inhalt zu $\frac{3}{2}\,a^2\pi$ wird, so ergibt sich, daß die Fläche, die sich zwischen der Asymptote und der Kissoide nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstreckt, einen endlich großen Inhalt hat, indem sie das Dreifache vom Inhalte des Kreises mit dem Radius a ist. Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ erhält man den Inhalt J_1 der Fläche, die von dem Kissoidenbogen OE und den beiden Radien von M nach O und nach E hin begrenzt wird. Man erhält:

$$J_1 = a^2 \cdot \frac{3\,\pi - 8}{4} \,.$$

Subtrahiert man J_1 von dem Kreisquadranten OME, dessen Inhalt $a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ ist, so erhält man den Inhalt J_2

derjenigen Fläche, die zwischen dem Kissoidenbogen OE und dem Kreisbogen OE liegt, nämlich:

$$J_2 = a^2 \cdot \frac{4 - \pi}{2}.$$

Endlich ergibt sich für die Fläche zwischen der Kreistangente in O, der Kreistangente in E und dem Quadrantenbogen OE der Inhalt J_3 aus:

$$J_3 = a^2 \cdot \frac{4 - \pi}{4}.$$

Von den drei Teilen, in welche das Quadrat über OM durch die Kissoide und den Kreis zerlegt wird, ist also J_2 doppelt so groß als J_3.

Um auch die Lage des Schwerpunktes einer Kissoidenfläche zu berechnen, haben wir

$$\xi \cdot J = \int x \cdot y \, dx \quad \text{und} \quad \eta J = \tfrac{1}{2} \int y^2 \, dx$$

auszuführen, wodurch wir nach den bekannten Rekursionsformeln erhalten:

$$\xi \cdot J = a^3 [5 \varphi - 5 \sin\varphi \cos\varphi - \tfrac{10}{3} \sin^3\varphi \cos\varphi - \tfrac{8}{3} \sin^5\varphi \cos\varphi],$$

$$\eta \cdot J = a^3 [-8 \, l \cos\varphi - 4 \sin^2\varphi - 2 \sin^4\varphi - \tfrac{4}{3} \sin^6\varphi].$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich zwar:

$$\xi \cdot J = 5 a^3 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{also} \quad \xi = \frac{5}{3} a.$$

Da aber $\eta \cdot J$ unendlich groß wird, also auch η, so liegt der Schwerpunkt jeder Hälfte der bis ins

Unendliche erstreckten Kissoidenfläche unendlich fern, und zwar in der Richtung der Asymptote, wie zu erwarten war. Aus $\xi = \frac{5}{3} a$ aber können wir schließen, daß der Schwerpunkt der ganzen nach beiden Seiten hin bis ins Unendliche erstreckten Kissoidenfläche auf dem Radius MA liegt, indem er denselben im Verhältnis 2 zu 1 teilt.

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d. h. für den Schwerpunkt der Fläche, deren Inhalt oben mit J_1 bezeichnet ist, ergibt sich aus den oben für $\xi \cdot J$, $\eta \cdot J$ und J_1 aufgestellten Formeln:

$$\xi = a \cdot \frac{15\pi - 44}{9\pi - 24} \quad \text{und} \quad \eta = a \cdot \frac{48\, l\, 2 - 32}{9\pi - 24}.$$

15. **Schwerpunkt der Lemniskatenfläche.** Die Lemniskate ist bekanntlich der Ort für alle Punkte, die von zwei festen Punkten aus ein konstantes Entfernungsprodukt haben. Nimmt man die Gerade, die diese festen Punkte verbindet, als Abszissenachse, das Mittellot zur Strecke $2e$ zwischen diesen beiden Punkten als Ordinatenachse, so ergibt die genannte Definition die folgende Gleichung, falls das genannte Produkt e^2 ist:

$$[y^2 + (x - e)^2]\,[y^2 + (x + e)^2] = e^4$$

oder:

$$(y^2 + x^2 + e^2)^2 - (2ex)^2 = e^4$$

oder:

$$(y^2 + x^2)^2 = 2e^2(x^2 - y^2).$$

Um auch ein Beispiel für die Formeln (VI) des § 2 zu haben, führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ setzen, wodurch wir erhalten:

$$r^4 = 2\,e^2 r^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 2\,e^2 r^2 \cos 2\,\varphi$$

oder:

$$r^2 = 2\,e^2 \cos 2\,\varphi = a^2 \cos 2\,\varphi\,,$$

wo a der Abstand ist vom Nullpunkte der Koordinaten, der zugleich Doppelpunkt der Lemniskate ist, bis zu ihren sonstigen Schnittpunkten der Abszissenachse. Der Inhalt eines beliebigen Sektors S der Lemniskate ergibt sich aus:

$$S = \int \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int \cos 2\,\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\,\varphi\,,$$

wo von $\varphi = \varphi_1$ bis $\varphi = \varphi_2$ zu integrieren war. Wenn wir $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ setzen, erhalten wir den Inhalt der Fläche, die zwischen der Abszissenachse und einer Doppeltangente liegt, und die den vierten Teil der ganzen Lemniskatenfläche bildet. Da $\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$ ist, so erhalten wir, daß die Fläche der ganzen Lemniskate gleich a^2 ist, also gerade so groß wie der Inhalt des Quadrates über dem Abstande a. Um auch die Lage des Schwerpunktes eines Lemniskatensektors festzustellen, haben wir:

$$S \cdot \xi = \int \frac{r^2}{2} \, d\varphi \cdot \frac{2}{3} r \cos\varphi = \frac{1}{3} \int r^3 \cos\varphi \, d\varphi$$

zu berechnen, oder, da $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ ist,

$$S \cdot \xi = \frac{a^3}{3} \int \cos 2\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \, .$$

Um das Integral auszuführen, setzen wir:

$$\sqrt{\cos 2\varphi} = t \, , \quad \text{also} \quad \sin 2\varphi = \sqrt{1 - t^4}$$

und:

$$-\sin 2\varphi \, d\varphi = t\,dt \quad \text{oder} \quad d\varphi = -\frac{t\,dt}{\sqrt{1 - t^4}} \, .$$

Da ferner $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + t^2}$ ist, so kommt:

$$S \cdot \xi = -\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \int \frac{t^3 \cdot t \cdot dt}{\sqrt{1 - t^4}} \cdot \sqrt{1 + t^2}$$

$$= -\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \int \sin^4\tau \, d\tau \, ,$$

wo noch $t^2 = \sin^2\tau$ gesetzt ist.

Nach bekannter Rekursionsformel ergibt sich nun:

$$\int \sin^4\tau \, d\tau = -\frac{1}{4} \sin^3\tau \cos\tau + \frac{3}{4} \cdot \int \sin^2\tau \, d\tau$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3\tau \cos\tau + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin\tau \cos\tau + \frac{\tau}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3\tau \cos\tau - \frac{3}{8} \sin\tau \cos\tau + \frac{3}{8} \tau \, .$$

Wir beschränken nun die Berechnung auf den oben erwähnten vierten Teil der Lemniskatenfläche, indem wir von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ integrieren, d. h.

von $t = 1$ bis $t = 0$ oder von $\tau = \frac{\pi}{2}$ bis $\tau = 0$.
Dadurch kommt:

$$S \cdot \xi = -\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 \tau \, d\tau = +\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \tau \, d\tau$$

$$= \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^3 \pi}{16\sqrt{2}}.$$

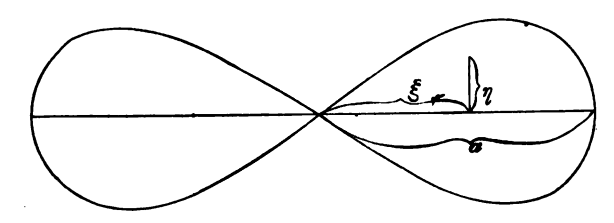


Fig. 13.

Und, da wir oben $S = \frac{a^4}{4}$ erhielten, kommt:

$$\xi = \frac{a \cdot \pi}{4\sqrt{2}} = \frac{a \pi \sqrt{2}}{8} = \frac{a \cdot 22 \cdot 7}{8 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{11}{20} \cdot a,$$

wo $\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ näherungsweise gesetzt ist.

Hiernach teilt der Schwerpunkt auf jeder von den beiden durch den Doppelpunkt getrennten Hälften der Lemniskatenfläche die Achse a näherungsweise im Verhältnis 11 zu 9.

Um auch den Abstand η des Schwerpunktes jedes Viertels der Lemniskatenfläche von der Achse zu bestimmen, haben wir

$$S \cdot \eta = \int \frac{r^2}{2} d\varphi \cdot \frac{2}{3} r \sin\varphi = \frac{1}{3} \cdot \int r^3 \sin\varphi \, d\varphi$$

zu berechnen. Wenn wir wieder $\cos 2\varphi = t^2$ setzen, erhalten wir:

$$S \cdot \eta = \frac{a^3}{3} \int \cos 2\varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{a^3}{3} \int \frac{t^3 \cdot t\,dt}{\sqrt{1-t^4}} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}} = -\frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

Nun ist:

$$\int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t^3}{4}\sqrt{1+t^2} - \frac{3}{4}\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

und:

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \tfrac{1}{2} t \cdot \sqrt{1+t^2} - \tfrac{1}{2} l\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

oder:

$$\int \frac{t^4\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t^3}{4} \cdot \sqrt{1+t^2} - \tfrac{3}{8} t \sqrt{1+t^2} + \tfrac{3}{8} l\left(t + \sqrt{t^2+1}\right),$$

und, wenn nun, wie oben, von $t = 1$ bis $t = 0$ integriert wird, kommt:

$$S \cdot \eta = \frac{a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \left[\tfrac{1}{4}\sqrt{2} - \tfrac{3}{8}\sqrt{2} + \tfrac{3}{8} l(1+\sqrt{2})\right]$$

oder:

$$S \cdot \eta = \frac{a^3}{6}\left[\tfrac{3}{8}\sqrt{2} \cdot l(1+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}\right],$$

und, nach Einsetzung von $S = \frac{a^2}{4}$:

$$\eta = \tfrac{2}{3} a\left[\tfrac{3}{8}\sqrt{2} \cdot l(1+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}\right]$$
$$= a \cdot \left[\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\, l(1+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{6}\right].$$

Danach liegt der Schwerpunkt jedes Viertels der Lemniskatenfläche nahezu $\frac{1}{5}a$ von ihrer Achse entfernt.

§ 5. Schwerpunkte von Rotationsflächen.

1. Schwerpunkt des Kreiskegelmantels. Die Fläche eines Kreiskegels entsteht durch Rotation einer geraden Linie, deren Gleichung $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$ sei, um die X-Achse. Hieraus folgt

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha},$$

so daß wir erhalten:

$$M = 2\pi\int y\,ds = \frac{2\pi}{\sin\alpha}\int y\,dy = \frac{2\pi}{\sin\alpha} \cdot \frac{y^2}{2}$$

und in den Grenzen y_1 und y_2:

$$M = \frac{\pi}{\sin\alpha}(y_2^2 - y_1^2).$$

Hieraus folgt für den Mantel des abgestumpften Kegels, dessen Grundradien y_1 und y_2 sind und dessen Seitenlinie $s = \frac{y_2 - y_1}{\sin\alpha}$ ist:

$$M = \pi \cdot s \cdot (y_2 + y_1).$$

Der Abstand ξ des auf der Kegelachse liegenden Schwerpunktes vom Scheitel ergibt sich aus:

$$M \cdot \xi = 2\pi \int x y \, ds = 2\pi \int \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot y \cdot \frac{dy}{\sin\alpha}$$

oder, nach Einsetzung der Grenzen:

$$M \cdot \xi = \frac{2\pi}{3 \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha} (y_2^3 - y_1^3),$$

so daß man für den gesuchten Abstand ξ des Schwerpunktes vom Scheitel erhält:

$$\xi = \frac{2}{3 \operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{2}{3 \operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2}{y_2 + y_1},$$

wo y_2 und y_1 die Grundradien des Kegelstumpfes sind und α der Winkel ist, den seine Achse mit jeder Seitenlinie bildet. Wenn insbesondere y_1 Null ist, so ergibt sich, da dann $\frac{y_2}{\operatorname{tg}\alpha}$ die Höhe wird, daß der Schwerpunkt des Kegelstumpfmantels die Höhe desselben im Verhältnis 2 zu 1 teilt, indem er vom Scheitel um zwei Drittel der Höhe entfernt ist.

2. **Schwerpunkt der Kugelzone.** Der Flächeninhalt Z der Kugelzone ergibt sich aus $Z = 2\pi \int y \, ds$, wo

$$x^2 + y^2 = a^2$$

und

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \frac{a\,dx}{y} = -\frac{a\,dy}{x}$$

ist. Demnach erhält man:

$$Z = 2\pi a \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 2\,a\pi\sqrt{a^2 - y^2} = 2\,a\pi x\,,$$

oder, nach Einsetzung der Grenzen:

$$Z = 2\,a\pi(x_2 - x_1)\,,$$

wo a der Radius der Kugel und $x_2 - x_1$ die Höhe der Zone ist, ein Resultat, das auch in der elementaren Stereometrie bewiesen wird. Um auch den Schwerpunkt der Kugelzone zu bestimmen, haben wir:

$$\xi \cdot Z = 2\pi \int y\,x\,ds$$

auszuführen, wo $x\,ds$ nach dem Obigen durch $-a\,dy$ ersetzt werden kann. Dadurch kommt:

$$\xi \cdot Z = -2\pi a \int y\,dy = -\pi a y^2$$

oder, nach Einsetzung der Grenzen:

$$\xi \cdot Z = a\pi(y_1^2 - y_2^2)\,,$$

oder, da $y_1^2 = a^2 - x_1^2$ und $y_2^2 = a^2 - x_2^2$ ist:

$$\xi \cdot Z = a\pi(x_2^2 - x_1^2)\,.$$

Dividiert man nun durch das oben für Z erhaltene Resultat, so erhält man:

$$\xi = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1)\,.$$

Der Schwerpunkt jeder Kugelzone ist also der Halbierungspunkt ihrer Höhe, d. h. der Verbindungsstrecke der beiden Kreiszentren.

3. **Schwerpunkt der Paraboloidfläche.** Wenn eine Parabel mit dem Parameter p um ihre Achse

rotiert, so beschreibt sie eine Paraboloidfläche, deren Inhalt bestimmt wird durch:

$$O = 2\pi \int y\, ds\,,$$

wo

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dy \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \frac{dy \cdot \sqrt{y^2 + p^2}}{p}$$

ist, so daß wir:

$$O = \frac{2\pi}{p} \cdot \int y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy$$

auszuführen haben. Für das Integral erhält man:

$$\tfrac{1}{3}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}\,,$$

so daß der Inhalt der Fläche zwischen $y = 0$ und $y = y$ bestimmt wird durch:

$$O = \frac{2\pi}{3p}\left[(y^2 + p^2)\sqrt{y^2 + p^2} - p^3\right].$$

Beispielsweise setzen wir $y = \frac{4}{3p}$ und erhalten:

$$O = \frac{2\pi}{3p} \cdot \left(\frac{5}{3}p \cdot \frac{25}{9}p^2 - p^3\right) = \frac{196}{81}p^2\pi\,,$$

so daß der Mantel eines Paraboloides, dessen Grundfläche ein Kreis mit dem Radius $\frac{4}{3}p$ ist, $\frac{49}{36}$ mal so groß ist, als die Grundfläche.

Um auch den Schwerpunkt eines solchen Paraboloidmantels finden zu können, haben wir:

$$O \cdot \xi = 2\pi \int y x\, ds = 2\pi \int y \cdot \frac{y^2}{2p} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + y^2}}{p}\, dy$$

auszuführen, oder:

$$O \cdot \xi = \frac{\pi}{p^2} \int y^3 \cdot \sqrt{y^2 + p^2}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{p^2} \left[\frac{y^4}{5} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{5} \int \frac{y^3\, dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{p^2} \cdot \frac{y^4}{5} \cdot \sqrt{p^2 + y^2}$$

$$+ \frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{y^2}{3} \sqrt{p^2 + y^2} - \frac{2}{3} p^2 \cdot \sqrt{p^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{p^2} \sqrt{p^2 + y^2} \cdot \left(\frac{y^4}{5} + \frac{p^2 y^2}{15} - \frac{2 p^4}{15} \right)$$

und, nach Einsetzung der Grenzen 0 bis y:

$$O \cdot \xi = \frac{\pi}{p^2} \sqrt{p^2 + y^2} \cdot \left(\frac{y^4}{5} + \frac{p^2 y^2}{15} - \frac{2 p^4}{15} \right) + \frac{2\pi}{15} \cdot p^3.$$

Den Abstand ξ des gesuchten Schwerpunktes vom Scheitel des Paraboloides erhält man, wenn man das soeben für $O \cdot \xi$ gefundene Resultat durch das oben für O gefundene dividiert. Als Beispiel wählen wir die Paraboloidfläche, deren Inhalt oben bestimmt ist, und bei der $y = \frac{4}{3} p$, also $x = \frac{8}{9} p$ war. So erhalten wir:

$$O \cdot \xi = \frac{\pi}{p^2} \cdot \frac{5}{3p} \cdot \left(\frac{256}{81 \cdot 5} p^4 + \frac{16}{9 \cdot 15} p^4 - \frac{2}{15} p^4 \right) + \frac{2\pi}{15} p^3$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot p^3 \cdot \left(\frac{256}{81} + \frac{16}{27} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{15} \pi p^3$$

$$= \pi p^3 \cdot \left(\frac{250}{243} + \frac{2}{15} \right) = p^3 \pi \cdot \frac{1412}{1215}.$$

Dividiert man nun durch das oben gefundene $O = \frac{196}{81} p^2 \pi$, so erhält man

$$\xi = \frac{358}{735} \cdot p$$

für den Abstand des Scheitels von dem Schwerpunkte des Paraboloidmantels, dessen Grundkreis den Radius $\frac{4}{3} p$ hat.

4. **Schwerpunkt einer Sphäroidfläche.** Wenn eine Ellipse um ihre kleine Achse b rotiert, so beschreibt sie ein Sphäroid. Näherungsweise hat z. B. die Erdkugel eine sphäroidische Gestalt. Die allgemeine Form für eine Zone des Sphäroides ergibt sich aus $Z = 2\pi \int x\, ds$, wo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $y a^2 dy + x b^2 dx = 0$ zu setzen ist. Man erhält:

$$x \cdot ds = \frac{dy}{b^2} \cdot \sqrt{a^2 b^4 - a^2 b^2 y^2 + a^4 y^2}\,.$$

Demnach ist:

$$Z = \frac{2\pi a}{b^2} \cdot \int \sqrt{b^4 + e^2 y^2}\, dy\,,$$

wo e den Abstand $\sqrt{a^2 - b^2}$ des Zentrums von jedem der beiden Brennpunkte bedeutet. Nach bekannten Integralformeln erhalten wir zunächst durch das allgemeine Integral:

$$Z = \frac{2\pi a}{e \cdot b^2} \left[\frac{e y}{2} \sqrt{b^4 + e^2 y^2} + \frac{b^4}{2} l \left(e y + \sqrt{b^4 + e^2 y^2} \right) \right].$$

Wenn wir hieraus den Inhalt E der einen Hälfte des Sphäroides berechnen wollen, haben wir von dem

für $y = b$ kommenden Werte den für $y = 0$ zu subtrahieren. So erhalten wir:

$$E = \frac{\pi a}{e \cdot b^2} \cdot [e b \cdot b \cdot a + b^4 l (e b + b a) - b^4 l b^2]$$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi b^2 \cdot a}{e} l \frac{e + a}{b} .$$

Für $b = 0$, also $e = a$ erhalten wir den Inhalt πa^2 des Kreises, der den Radius a hat. Um jedoch zu zeigen, daß der Sphäroidmantel den Halbkugelmantel ergibt, wenn man $b = a$ und $e = 0$ setzt, haben wir vorerst zu untersuchen, was aus:

$$\frac{\pi b^2 a}{e} \cdot l \frac{a + e}{b}$$

für $b = a$, also $e = 0$ wird, da zunächst $\infty \cdot 0$ kommt. Wir ersetzen deshalb b durch $\sqrt{(a + e)(a - e)}$. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{\pi \cdot (a^2 - e^2) \cdot a}{e} \cdot l \sqrt{\frac{a + e}{a - e}}$$

$$= \pi (a^2 - e^2) a \cdot \frac{\frac{1}{2} l (a + e) - \frac{1}{2} l (a - e)}{e} .$$

Nun weiß man aber, daß $\frac{l (a + x) - l (a - x)}{2 x}$ für $x = 0$ denselben Grenzwert haben muß wie

$$\frac{\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}}{2} = \frac{2 a}{2 (a^2 - x^2)} = \frac{a}{a^2 - x^2} .$$

Deshalb erhalten wir:

$$\pi (a^2 - e^2) \cdot a \cdot \frac{1}{a}\,.$$

Demnach kommt für den Inhalt E der einen Hälfte der Sphäroidfläche

$$E = \pi a^2 + \pi a^2 = 2 \pi a^2\,,$$

also der Inhalt des Mantels der Halbkugel vom Radius a.

Um nun auch den Abstand η des Schwerpunktes der halben Sphäroidfläche vom Zentrum zu finden, haben wir:

$$Z \cdot \eta = 2 \pi \int x \cdot y \, ds = \frac{2 \pi a}{b^2} \int y \sqrt{b^4 + e^2 y^2 dy}$$

auszuführen, wodurch wir erhalten:

$$Z \cdot \eta = \frac{2 \pi a}{3 b^2 e^2} \cdot (b^4 + e^2 y^2)^{\frac{3}{2}}\,,$$

und, wenn wir wieder $y = b$ und $y = 0$ als Grenzen nehmen:

$$E \cdot \eta = \frac{2 \pi a}{3 b^2 e^2} (a \cdot b \cdot a^2 b^2 - b^2 \cdot b^4)$$

$$= \frac{2 \pi a b \cdot (a^3 - b^3)}{3 (a^2 - b^2)} = \frac{2 \pi a b (a^2 + a b + b^2)}{3 (a + b)}\,.$$

Hieraus folgt, da oben

$$E = \pi a^2 + \frac{\pi b^2 a}{e} l \frac{e + a}{b}$$

bestimmt ist:

$$\eta = \frac{2 b (a^2 + a b + b^2)}{3 (a + b) \left[a + \frac{b^2}{e} l \frac{e + a}{b}\right]}\,,$$

woraus für $b = a$, also $e = 0$, nach Rücksicht auf das Resultat der obigen Grenzuntersuchung, folgt:

$$\eta = \frac{6\,a^3}{12\,a^2} = \frac{a}{2}$$

oder das auch elementarer beweisbare Resultat, daß der Schwerpunkt eines Halbkugelmantels vom Zentrum um die Hälfte des Radius entfernt ist.

5. **Schwerpunkt einer Astroidfläche.** Wenn die Hypozykloide, die man Astroide nennt und die die Gleichungen $x = a \cdot \cos^3 t$ und $y = a \cdot \sin^3 t$ hat, um die X-Achse rotiert, so entsteht eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Fläche, deren Schwerpunkt wir bestimmen wollen. Um zunächst ihren Inhalt zu berechnen, erhalten wir aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 9\,a^2 \sin^2 t \cos^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt^2,$$

daß das Bogenelement ds gleich $-3\,a \sin t \cos t\,dt$ zu setzen ist, und zwar mit dem negativen Vorzeichen, weil mit wachsendem x der Wälzungswinkel t abnimmt. Deshalb ergibt sich für die Astroidenfläche:

$$A = 2\,\pi \int y\,ds = -6\,\pi\,a^2 \int \sin^4 t \cos t\,dt,$$

wo in den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ bis 0 zu integrieren ist. Demnach erhalten wir:

$$A = +\tfrac{6}{5}\,a^2\,\pi \cdot [\sin^5 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{6}{5}\,a^2\,\pi\,.$$

Um den gesuchten Abstand ξ des Schwerpunktes der Astroidenfläche festzustellen, haben wir

$$A \cdot \xi = 2\,\pi \int x\,y\,ds$$

zu berechnen, wofür wir zunächst erhalten:

$$-6\,a^3\,\pi\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^4 t\,dt = +\tfrac{3}{8}\,a^3\,\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(2\,t)\,dt\,.$$

Wenn wir nun $2\,t=\tau$ setzen, erhalten wir:

$$A\cdot\xi = \frac{3\,\pi\,a^3}{16}\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin^4\tau\,d\tau$$

$$= \frac{3\,\pi\,a^3}{16}\cdot\left[-\tfrac{1}{4}\cos\tau\sin^3\tau + \tfrac{3}{8}\cos\tau\sin\tau + \tfrac{3}{8}\,\tau\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{9\,\pi^2\,a^3}{128}\,,$$

so daß sich:

$$\xi = \frac{15\,\pi}{256}\cdot a \quad \text{oder nahezu} \quad \tfrac{1}{5}\,a$$

ergibt, wo a der Radius des Kreises ist, der durch die vier Spitzen der Astroide hindurchgeht, durch deren Rotation die behandelte Fläche entsteht.

§ 6. Schwerpunkte von Körpern.

1. **Schwerpunkt eines Tetraeders.** Von den vier Dreiecken, welche ein Tetraeder $ABCD$ begrenzen, betrachte man ABC als Grundfläche und den Punkt D als gegenüberliegende Spitze. Da die Schwerpunkte aller Dreiecke, deren Ebenen der Grundfläche ABC parallel sind, auf der geraden Linie

liegen, die die Spitze D mit dem Schwerpunkte T von ABC verbindet, so muß auch der Schwerpunkt S des Tetraedervolumens auf der geraden Linie DT liegen. Genau so erkennt man, daß S auch auf der geraden Linie liegen muß, welche die Ecke A mit dem Schwerpunkte U des Dreiecks BCD verbindet. Wenn nun E die Mitte der Kante BC ist, so liegt T auf AE, und zwar so, daß TA zwei Drittel und TE ein Drittel der Transversale AE ist, wie schon in § 4, 1 besprochen ist. Ebenso wissen wir, daß der Schwerpunkt U des Dreiecks BCD auf ED liegen muß, und zwar so, daß UD zwei Drittel, UE ein Drittel der Transversale DE ist. Demnach erkennen wir in der Ebene, die zwischen EA und ED gelegt werden kann, daß T die Transversale EA ebenso teilt, wie U die Transversale ED teilt, nämlich im Verhältnis 1 zu 2. Demnach ist UT parallel zu AD und ein Drittel von AD. Hieraus folgt aber, daß AU und DT sich im Verhältnis 3 zu 1 teilen, so daß also ihr Schnittpunkt S, der Schwerpunkt des ganzen Tetraeders, die Verbindungslinie DT so teilen muß, daß DS drei Viertel, TS ein Viertel der ganzen Länge DT sein muß. Der Schwerpunkt S eines Tetraeders liegt also auf jeder der vier Verbindungsstrecken einer Ecke mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Dreiecksfläche und teilt jede solche Verbindungsstrecke im Verhältnis 3 zu 1. Wenn also h der senkrechte Abstand der Spitze D

von der Grundfläche ABC ist, so ist der senkrechte Abstand des Tetraederschwerpunktes S von derselben Grundfläche ABC ein Viertel der Höhe h.

2. **Schwerpunkt einer beliebigen Pyramide.** Wenn man die Grundfläche g einer beliebigen Pyramide durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und jede Diagonale mit der Spitze O der Pyramide verbindet, so zerfällt die Pyramide in lauter Tetraeder, deren Schwerpunkte nach dem Schlusse von 1. sämtlich im Abstande $\frac{h}{4}$ von der Grundfläche liegen, wenn h die Höhe, d. h. der Abstand der Spitze O von der Grundfläche, bedeutet. In demselben Abstande $\frac{h}{4}$ von g liegt also auch der Schwerpunkt S der ganzen Pyramide. Andererseits muß S auch auf der geraden Linie liegen, welche die Spitze O mit dem Schwerpunkte T der Grundfläche g verbindet. Der Schwerpunkt S einer beliebigen Pyramide teilt also die Verbindungsstrecke OT der Spitze O mit dem Schwerpunkte T der Grundfläche so, daß ST ein Viertel, SO drei Viertel von OT ist.

3. **Schwerpunkt eines beliebigen Polyeders.** Für ein Polyeder, d. h. für einen Teil des Raumes, der von lauter ebenen Polygonen begrenzt wird, kann der Schwerpunkt in derselben Weise gefunden werden, wie in § 4 der Schwerpunkt eines beliebigen Polygones gefunden wurde, weil jedes Polyeder in Tetra-

eder zerlegt werden kann, und zwar immer auf mehrfache Weise.

4. **Schwerpunkt eines beliebigen Obelisken.** Obelisk heißt jeder Teil des Raumes, dessen Grenzflächen erstens zwei in parallelen Ebenen liegende p-Ecke sind, deren Seiten paarweise parallel sind, und zweitens die p-Trapeze sind, deren Grundlinien die p Paare paralleler Seiten sind. Diese Trapeze können teilweise oder sämtlich in Dreiecke ausarten. Tun sie es sämtlich, so nennt man den Obelisken Prismatoid, und zwar ist ein Prismatoid, dessen beide Parallelflächen Polygone mit m und mit n Seiten sind, ein Obelisk mit $m + n$ Seitenflächen, die Dreiecke sind. Schon im V. Abschnitte des ersten Bandes ist das Volumen eines solchen Obelisken durch die Höhe und die Inhalte von irgend drei Flächen ausgedrückt, deren Ebenen parallel den Ebenen der beiden Grundflächen sind. Wir entnehmen diesem Abschnitt die Formel (4), welche den Inhalt a einer beliebigen solchen Parallelfläche durch die beiden Grundflächen g und g' und durch die beiden Teile $\alpha \cdot h$ und $\alpha' \cdot h$ ausdrückt, in welche die Höhe h, d. h. der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen, durch die Parallelfläche vom Inhalte a zerlegt wird. Dabei schreiben wir y statt a, $x' \cdot h$ statt $\alpha \cdot h$ und $(1 - x) \cdot h$ statt $\alpha' \cdot h$. Dann erhalten wir:

$$y = (1 - x)^2 \cdot g + x^2 \cdot g' + 2x(1 - x) \cdot \sqrt{g g'},$$

wonach $\sqrt{g g'}$ durch

$$\frac{a}{2\alpha\alpha'} - \frac{\alpha'}{2\alpha}\cdot g - \frac{\alpha}{2\alpha'}\cdot g'$$

zu ersetzen ist, wenn a der Inhalt derjenigen Parallelfläche ist, deren Abstände von g und von g' $\alpha \cdot h$ und $\alpha' \cdot h$ sind. Es reicht aus, wenn wir dem V. Abschnitte des ersten Bandes nichts weiter entnehmen, als daß der Inhalt y einer beliebigen Parallelfläche eine quadratische Funktion ihres Abstandes $x \cdot h$ von einer der beiden Grundflächen g ist, nämlich:

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C,$$

wo A, B, C drei Koeffizienten sind, die noch unbestimmt sind, aber durch welche drei beliebige Parallelflächen leicht bestimmt werden können. Dem Usus entsprechend, drücken wir A, B, C durch die beiden Grundflächen g und g' und durch die Mittelfläche m aus, indem wir nacheinander $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ setzen. So erhalten wir:

$$g = C, \quad g' = A + B + C, \quad m = A \cdot \tfrac{1}{4} + B \cdot \tfrac{1}{2} + C,$$

woraus folgt:

$$A = 2g + 2g' - 4m, \quad B = 4m - 3g - g', \quad C = g.$$

Das Volumen V des Obelisken erhalten wir nun, wenn wir die unzählig vielen unendlich dünnen Scheibchen vom Volumen $h \cdot y \cdot dx$ summieren, und zwar von $x = 0$ bis $x = 1$. So erhalten wir:

$$V = h \cdot \int_0^1 (A x^2 + B x + C) dx$$

oder:

$$\frac{V}{h} = A \cdot \tfrac{1}{3} + B \cdot \tfrac{1}{2} + C \cdot 1,$$

woraus sich die bekannte Formel:

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

für das Volumen jedes Obelisken ergibt.[1])

Das Moment des Schwerpunktes $\xi \cdot V$ folgt aus der Summe der unzählig vielen unendlich kleinen Momente oder aus:

$$V \cdot \xi = h^2 \cdot \int_0^1 (Ax^2 + Bx + C)\, x\, dx,$$

woraus für die Grenzen 0 bis 1 folgt:

$$\frac{V \cdot \xi}{h^2} = A \cdot \tfrac{1}{4} + B \cdot \tfrac{1}{3} + C \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen der oben gefundenen Ausdrücke, in denen A, B, C abhängig von g, g', m dargestellt sind:

$$V \cdot \xi = h^2(\tfrac{1}{6} g + \tfrac{1}{3} m).$$

Durch Division erhalten wir endlich für den Abstand ξ des Schwerpunktes jedes Obelisken von der Grundfläche g:

$$\xi = h \cdot \frac{g' + 2m}{g + g' + 4m}.$$

[1]) Über die Ausdehnung dieser Volumenformel auf allgemeinere Körperformen handelt Abschnitt V in diesem Bande meiner „Auslese“.

Es liegt nahe, auch den Abstand ξ_1 von der Mittelfläche mit dem Inhalte m zu berechnen. Man hat zu diesem Zwecke $\xi_1 = \frac{h}{2} - \xi$ zu setzen und erhält:

$$\xi_1 = h \cdot \frac{\frac{1}{2}(g - g')}{g + g' + 4m},$$

woraus folgt, daß der Schwerpunkt eines Obelisken stets in der Mittelfläche liegt, wenn seine beiden Grundflächen g und g' gleichen Inhalt haben, gleichviel wie sonst der Obelisk beschaffen sein mag.

Für einen Pyramidenstumpf ist

$$\sqrt{m} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{g} + \sqrt{g'})$$

oder:

$$m = \tfrac{1}{4}(g + g' + 2\sqrt{g g'})$$

zu setzen, so daß man für den Abstand ξ_1 des Schwerpunktes eines Pyramidenstumpfes von der Mittelfläche erhält:

$$\xi_1 = h \cdot \frac{\frac{1}{4}(g - g')}{g + g' + \sqrt{g g'}}.$$

Um hieraus den schon in 2. ermittelten Abstand des Schwerpunktes einer Pyramide von der Grundfläche g zu erhalten, hat man nur $g' = 0$ zu setzen und das erhaltene Resultat $\frac{h}{4}$ von $\frac{h}{2}$ zu subtrahieren. Da Kegel und Kegelstumpf als Pyramide und Pyramidenstumpf betrachtet werden kann, so gelten die obigen Formeln auch für diese gewölbt-

flächigen Körper. Insbesondere ergibt sich für den Schwerpunkt eines Kegelstumpfes:

$$\xi_1 = \frac{h}{4} \frac{r^2 - r'^2}{r^2 + r r' + r'^2},$$

wo ξ_1 den Abstand des Schwerpunktes von der Mittelfläche, h die Höhe, r und r' die Grundradien bedeuten.

Da die obigen auf den Obelisken bezüglichen Betrachtungen lediglich darauf basiert sind, daß der Inhalt einer den Grundflächen parallelen Schnittfläche eine quadratische Funktion der Höhe ist, so gelten die oben abgeleiteten Formeln für das Volumen und die Schwerpunktlage auch bei jedem zwischen zwei parallelen Ebenen liegenden Teile des Raumes, wenn nur der Inhalt einer Parallelfläche eine quadratische Funktion der Höhe derselben ist, wie es z. B. die Kugelschicht ist, d. h. ein von zwei parallelen Ebenen begrenzter Teil des Kugelkörpers. Allgemeiner läßt sich auf solche Weise das Volumen und der Schwerpunkt für jeden zwischen zwei parallelen Ebenen liegenden Körper ermitteln, bei welchem der Inhalt einer Parallelfläche eine beliebige ganze Funktion ihres Abstandes von einer dieser parallelen Ebenen ist. (Vgl. hier, Abschnitt V.)

5. **Schwerpunkt eines Kugelsektors.** Aus dem Inhalt einer Kugelkappe $2 r \pi h$, d. h. eines von einem Kreise begrenzten Teiles der Kugeloberfläche, läßt

sich bekanntlich das Volumen eines Kugelsektors elementar dadurch berechnen, daß man die Kugelkappe in unzählig viele, unendlich kleine Teile zerlegt und diese als Grundflächen von Pyramiden ansieht, deren Spitze das Kugelzentrum ist. So erkennt man, daß man den Inhalt $2 r \pi h$ der Kugelkappe mit $\frac{1}{3} \cdot r$ zu multiplizieren hat, um das Volumen des zugehörigen Kugelsektors zu erhalten. Dabei bedeutete immer r den Kugelradiuc und h die Höhe der Kugelkappe, d. h. die Höhe desjenigen Kugelsegmentes, welches ein Teil des Kugelsektors ist. Da nun die Schwerpunkte der unzählig vielen, unendlich kleinen Pyramiden nach 2. sämtlich um drei Viertel des Radius vom Zentrum entfernt liegen, so bilden diese Schwerpunkte eine Kugelkappe, und, da alle Punkte derselben gleich belastet sind, so muß der Schwerpunkt dieser Kugelkappe auch der gesuchte Schwerpunkt des zugehörigen Kugelsektors sein. Da nun nach 2. in § 5 der Schwerpunkt einer Kugelkappe der Halbierungspunkt ihrer Höhe ist, also vom Zentrum den Abstand $r - \frac{h}{2}$ hat, so erhält man für den Abstand ξ des Schwerpunktes eines Kugelsektors:

$$\xi = \frac{3}{4}\left(r - \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h .$$

Da insbesondere bei einer Halbkugel $h = r$ ist, so ergibt sich, daß der Schwerpunkt einer Halbkugel deren Mittelradius im Verhältnis 3 zu 5 teilt.

6. **Schwerpunkt eines Kugelsegmentes.** Da jedes Kugelsegment Differenz zwischen einem Kugelsektor und einem Kegel ist, so läßt sich der Zentralabstand ξ eines Kugelsegmentes am einfachsten durch Anwendung der Momentgleichung finden, und zwar bezüglich der Ebene, welche durch das Zentrum parallel zu der Ebene des Kreises gelegt werden kann, der zugleich Basis des Kugelsegmentes und des Kegels ist. So erhält man:

$$\xi \cdot \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = (\tfrac{3}{4} r - \tfrac{3}{8} h) \cdot \tfrac{2}{3} r^2 \pi h$$
$$- \frac{3}{4}(r - h) \cdot \frac{r - h}{3} \varrho^2 \pi ,$$

wo die schon gefundenen Zentralabstände eingesetzt sind, ebenso wie die Volumina von Segment, Sektor und Kegel. Wenn man nun noch durch $\frac{\pi}{3}$ hebt und ϱ^2 durch $h(2r - h)$ ersetzt, was nach dem Sehnensatze richtig ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\xi \cdot h^2(3r - h) &= (\tfrac{3}{4} r - \tfrac{3}{8} h) \cdot 2r^2 h - \tfrac{3}{4}(r - h)^2 \cdot h(2r - h) \\
&= (2r - h) \cdot \tfrac{3}{8} \cdot 2r^2 h - (2r - h) \cdot \tfrac{3}{4}(r - h)^2 \cdot h \\
&= \tfrac{3}{4}(2r - h)[r^2 h - (r^2 - 2rh + h^2) h] \\
&= \tfrac{3}{4}(2r - h) h^2 (2r - h) ,
\end{aligned}$$

also:

$$\xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h} .$$

Für die Halbkugel, wo $h = r$ ist, ergibt sich hieraus, wie in 5.: $\xi = \frac{3}{8} r$.

7. **Schwerpunkt einer Kugelschicht.** Um den Zentralabstand des Schwerpunktes einer Kugelschicht zu finden, d. h. eines von zwei in parallelen Ebenen liegenden Kreisflächen begrenzten Kugelteiles, ist es zweckmäßig, die Radien ϱ und ϱ' dieser Kreisflächen einzuführen. Deshalb wollen wir auch schon im Resultat von 6. das Volumen S des Kugelsegmentes einführen und $2r - h$ durch $\frac{\varrho^2}{h}$ ersetzen. Dann erhalten wir aus der Formel für ξ in 6.:

$$\xi = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\varrho^2}{h}\right)^2 : \frac{S}{\frac{\pi h^2}{3}}$$

oder:

$$S \cdot \xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varrho^4 \cdot \pi h^2}{h^2 \cdot 3} = \pi \cdot \frac{\varrho^4}{4}$$

oder:

$$\xi = \frac{\pi \varrho^4}{4 S}.$$

Nach der Momentengleichung erhalten wir nun für das Moment des Schwerpunktes einer Kugelschicht vom Volumen A und mit den Grundradien ϱ und ϱ', wenn ξ der Zentralabstand ihres Schwerpunktes ist:

$$\xi \cdot A = \frac{\pi}{4} (\varrho^4 - \varrho'^4)$$

und, da $A = \frac{\pi h}{6} (3 \varrho^2 + 3 \varrho'^2 + h^2)$ ist:

$$\xi = \frac{3 (\varrho^4 - \varrho'^4)}{2 h (3 \varrho^2 + 3 \varrho'^2 + h^2)}.$$

Das oben auf elementarem Wege gefundene Resultat für das Moment des Schwerpunktes einer Kugelschicht erscheint bei Anwendung der Integralrechnung in folgender Weise:

$$\xi \cdot A = \int y^2 \pi \cdot x\, dx = \pi \int (r^2 - x^2)\, x\, dx$$

$$= \pi r^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \pi \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{\pi}{4} [2\, r^2 (r^2 - y^2) - (r^2 - y^2)^2]$$

$$= \frac{\pi}{4} (r^2 - y^2)(r^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} (r^4 - y^4)\,.$$

Wenn wir nun die Grenzen $y_1 = \varrho$, $y_2 = \varrho'$ einsetzen, da ϱ der Radius des dem Zentrum näheren Kreises ist, so erhalten wir:

$$A \cdot \xi = \frac{\pi}{4} (r^4 - \varrho'^4) - \frac{\pi}{4} (r^4 - \varrho^4) = \frac{\pi}{4} (\varrho^4 - \varrho'^4)\,,$$

also das obige Resultat.

8. **Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids.** Wenn eine Parabel um ihre Achse rotiert, so beschreibt sie ein Paraboloid, dessen Volumen zwischen zwei Parallelschnitten sich ergibt aus:

$$V = \int y^2 \pi\, dx = 2\, p\, \pi \cdot \int x\, dx\,,$$

und, wenn x_1 und x_2 die Grenzen sind,

$$V = p\, \pi (x_2^2 - x_1^2)\,.$$

Das Moment des Schwerpunktes folgt aus:

$$V \cdot \xi = 2\, p\, \pi \cdot \int x^2\, dx$$

und in denselben Grenzen:

$$V \cdot \xi = \tfrac{2}{3} p\, \pi (x_2^3 - x_1^3)\,,$$

so daß, nachdem durch $x_2 - x_1$ gehoben ist, sich ergibt:

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2}{x_2 + x_1}.$$

Wenn insbesondere $x_1 = 0$ ist, also das Paraboloid über dem Kreise steht, dessen Inhalt $y_2^2 \pi$ ist und zugleich seinen Scheitel als Spitze hat, kommt $V = \frac{1}{2} y_2^2 \pi x_2$ und $\xi = \frac{2}{3} x_2$, so daß ein solches Paraboloid halb so viel Volumen hat, wie der Zylinder, der dieselbe Grundfläche $y_2^2 \pi$ und dieselbe Höhe x_2 hat, und seinen Schwerpunkt in einem Punkte hat, dessen Abstand von der Grundfläche zwei Drittel der Höhe ist.

9. **Schwerpunkt eines Sphäroids,** d. h. des Körpers, der entsteht, wenn eine Ellipse um die kleine Achse b rotiert. Hier erhalten wir:

$$V = \int x^2 \pi \, dy,$$

wo $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ zu setzen ist, also:

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2} \cdot \int (b^2 - y^2) \, dy = \pi a^2 y - \frac{\pi a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3},$$

und nach Einsetzung der Grenzen y_1 und y_2:

$$V = \frac{a^2 \pi}{3 b^2} [3 b^2 (y_2 - y_1) - (y_2^3 - y_1^3)].$$

Wenn wir nun $y_2 - y_1 = h$ setzen, $\frac{\pi h}{6}$ allein absondern, so können wir in folgender Weise umformen:

$$V = \frac{\pi h}{6}\left[6 a^2 - \frac{2 a^2}{b^2}(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2)\right]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[\frac{3 a^2}{b^2}(b^2 - y_2^2) + \frac{3 a^2}{b^2}(b^2 - y_1^2)\right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{b^2}(y_2^2 - 2 y_2 y_1 + y_1^2)\right]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[3 x_1^2 + 3 x_2^2 + \frac{a^2 h^2}{b^2}\right].$$

Wenn wir insbesondere $b = a$ setzen, so erhalten wir das Volumen der Kugelschicht (Nr. 7). Wenn wir ferner $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $h = b$ setzen, erhalten wir die Hälfte des ganzen Sphäroides, nämlich $\frac{2}{3} a^2 b \pi$. Auch das ganze Sphäroid können wir aus der für V abgeleiteten Formel erhalten, wenn wir nämlich $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $h = 2b$ setzen. In der Tat ergibt sich dann $\frac{4}{3} a^2 b \pi$.

Um den Schwerpunkt einer Sphäroidschicht zu bestimmen, haben wir:

$$V \cdot \eta = \int x^2 \pi \cdot y \cdot dy$$

auszuführen, oder:

$$V \cdot \eta = \pi \int \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) y \, dy$$

$$= \frac{\pi a^2}{b^2}\left(\frac{b^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{4 b^2}(2 b^2 y^2 - y^4),$$

oder, nach Einsetzung der Grenzen y_2 und y_1:

$$V \cdot \eta = \frac{\pi a^2}{4 b^2}(y_2^2 - y_1^2)[2 b^2 - y_2^2 + y_1^2].$$

Aus dem oben berechneten Ausdruck für V und diesem Ausdruck für $V \cdot \eta$ können wir durch Division natürlich den Schwerpunkt jeder beliebigen Sphäroidschicht bestimmen. Wir beschränken uns jedoch auf eine der beiden Sphäroidhälften, welche durch den Kreis getrennt werden, der die große Halbachse a der Ellipse zum Radius hat. Dann haben wir $y_1 = 0$, $y_2 = b$ zu setzen und erhalten:

$$V \cdot \eta = \frac{\pi a^2}{4 b^2} \cdot b^2 \cdot (2 b^2 - b^2) = \frac{\pi a^2 b^2}{4} .$$

Um η zu erhalten, haben wir dies durch $\frac{2}{3} a^2 b \pi$ zu dividieren, wodurch wir $\eta = \frac{3}{8} b$, in Übereinstimmung mit 5., wo der Schwerpunkt einer Halbkugel bestimmt ist. Wenn eine Ellipse, statt um die kleine Achse b, um die große Achse a rotiert, so ist die Untersuchung genau dieselbe, nur daß immer x und y sowie a und b vertauscht erscheinen.

II. Abschnitt.

Die Parabel in der elementaren analytischen Geometrie.

§ 1. Grundlagen.

Die Tangentengleichung der Parabel ist vollkommen ausreichend, um viele Eigenschaften der Parabel abzuleiten, die in den elementaren Büchern über Analytische Geometrie entweder gar nicht oder mit Hilfsmitteln abgeleitet werden, die zu hoch liegen oder unnötig kompliziert sind. So ist in der Analytischen Geometrie von Gaudtner der Satz gar nicht erwähnt, daß auf zwei Parabeltangenten die Schnittpunkte von drei anderen proportionale Strecken hervorrufen, obwohl dieser Satz einerseits ohne irgend welche Schwierigkeit aus dem dort erwähnten Satze hervorgeht, wonach die Ordinate des Schnittpunktes zweier Tangenten gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Berührungspunkte ist, und obwohl dieser Satz andererseits in der projektiven Geometrie die Definition der Parabel als des Ortes der Verbindungslinien entsprechender Punkte auf zwei projektiv-

ähnlichen geraden Punktreihen enthält und deshalb zu einer einfachen Erzeugung der Parabel aus vier beliebigen Tangenten führt. Auch ist in der erwähnten Analytischen Geometrie von Gaudtner, die für die Theorie der Kegelschnitte wegen der mannigfachen Lehrsätze und Aufgaben sonst sehr zu empfehlen ist, die Quadratur eines Parabelsegmentes nur dadurch bewerkstelligt, daß die Formel für die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis n^2 angewandt werden mußte, während sich die Quadratur des Parabelsegmentes ganz einfach ableiten läßt (§ 3, II), ja sogar, ohne Benutzung der Formel für die Summe der unzählig vielen Glieder einer geometrischen Reihe, deren konstanter Quotient kleiner als 1 ist.

Nachdem man die Tangentengleichung einer Parabel

$$(1) \qquad y y_1 = p(x + x_1)$$

abgeleitet hat, wo x_1, y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes sind und p der Parameter der Parabel ist, wird man aus (1) erkennen, daß für $y = 0$, $x = -x_1$ wird und diese Erkenntnis mit der Definition der Parabel als des Ortes für alle Punkte verbinden, die von einem festen Punkte, dem Brennpunkte und einer festen Geraden, der Leitlinie, gleiche Entfernung haben. So gelangt man zu den Rhombuseigenschaften der Parabel. Unter Rhombuseigenschaften einer Parabel verstehe ich nämlich die Eigenschaften, die damit zusammenhängen, daß der

Brennpunkt, der Berührungspunkt jeder Tangente, ein Punkt der Leitlinie und der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Achse der Parabel die vier Ecken eines Rhombus sind. Zu diesen Rhombuseigenschaften einer Parabel gehört u. a. auch die in der Optik vorkommende Eigenschaft, daß jede Tangente gleiche Winkel bildet erstens mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Brennpunkte, zweitens mit der Geraden, die durch den Berührungspunkt parallel der Achse gezogen werden kann.

Nachdem diese auf eine Tangente bezüglichen Eigenschaften besprochen sind, wird man die auf zwei Tangenten bezüglichen Eigenschaften etwa in folgender Art ableiten. Wenn x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 die Koordinaten der Berührungspunkte zweier Tangenten und x_3, y_3 die ihres Schnittpunktes sind, so gelten die Gleichungen:

$$(2) \qquad y_3\, y_1 = p\, x_3 + p\, x_1\,,$$

$$(3) \qquad y_3\, y_2 = p\, x_3 + p\, x_2\,,$$

aus denen durch Subtraktion folgt:

$$(4) \qquad y_3\,(y_1 - y_2) = p\, x_1 - p\, x_2\,.$$

Nach der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ ist die rechte Seite von (4) ersetzbar durch $\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)$. Hebt man dann durch $y_1 - y_2$, so erhält man:

$$(5) \qquad y_3 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\,.$$

Diese Formel (5) reicht vollkommen aus, um den oben erwähnten Satz über die Proportionalität der

Strecken zu beweisen, die auf zwei Tangenten durch drei andere hervorgerufen werden, und um die Erzeugung der Parabel aus vier gegebenen Tangenten zu bewerkstelligen. Für den Zweck der Quadratur eines Parabelsegmentes müssen wir jedoch auch die Abszisse x_3 des Schnittpunktes zweier Tangenten durch die Abszissen x_1 und x_2 ihrer Berührungspunkte ausdrücken. Durch Addition von (2) und (3) und Benutzung von (5) erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 = 2px_3 + px_1 + px_2\,,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2) = 2px_3 + px_1 + px_2\,.$$

Nun hebt sich $\frac{1}{2}y_1^2$ gegen px_1 und $\frac{1}{2}y_2^2$ gegen px_2 wegen der Parabelgleichung, so daß man erhält:

$$y_1 y_2 = 2px_3\,,$$

oder, wegen der Parabelgleichung:

$$\sqrt{2px_1}\cdot\sqrt{2px_2} = \pm 2px_3\,,$$

oder, gehoben:

$$\pm\sqrt{x_1 \cdot x_2} = x_3\,. \tag{6}$$

Man beachte hierbei das doppelte Vorzeichen, das sich ergibt, weil aus der Parabelgleichung $y = \pm\sqrt{2px}$ folgt. Man erkennt aus der Figur, daß in der Tat bei (6) beide Vorzeichen zu berücksichtigen sind, und daß (6) in Worten genau so lautet:

Die Abszisse des Schnittpunktes zweier Tangenten ist gleich dem positiven oder ne-

gativen geometrischen Mittel der Abszissen ihrer Berührungspunkte, und zwar gleich dem positiven, wenn beide Berührungspunkte auf derselben Hälfte der durch den Scheitel geschiedenen beiden Parabelhälften liegen, gleich dem negativen, wenn sie auf verschiedenen Hälften liegen.

In vielen Büchern über Analytische Geometrie ist die in diesem Satze enthaltene Unterscheidung gar nicht beachtet.

Das Resultat (5) zeigt, daß der Schnittpunkt zweier Tangenten dieselbe Ordinate hat wie der Halbierungspunkt der Berührungssehne, d. h. der Strecke zwischen den Berührungspunkten. Denn die Koordinaten x_4, y_4 des Halbierungspunktes dieser Berührungssehne sind ja die arithmetischen Mittel der entsprechenden Koordinaten der beiden Berührungspunkte, oder:

$$x_4 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\,, \tag{7}$$

$$y_4 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\,. \tag{8}$$

Aus (5) und (8) folgt, daß die Verbindungslinie des Schnittpunktes der beiden Tangenten mit dem Halbierungspunkte der Berührungssehne der Parabelachse parallel ist. Hiernach muß die Ordinate y_5 des Schnittpunktes dieser Verbindungslinie mit der Parabel auch gleich $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ sein. Um also auch die Abszisse x_5 dieses Schnittpunktes zu erhalten, hat

man in die Parabelgleichung $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ zu setzen. Man erhält also:

$$[\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)]^2 = 2\,p\,x_5\,,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}p\,x_1 + \tfrac{1}{2}p\,x_2 + \tfrac{1}{2}y_1\,y_2 = 2\,p\,x_5\,,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}p\,x_1 + \tfrac{1}{2}p\,x_2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,p\,x_1}\cdot\sqrt{2\,p\,x_2} = 2\,p\,x_5\,,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \pm \sqrt{x_1\,x_2} = 2\,x_5\,,$$

oder:

$$x_4 \pm x_3 = 2\,x_5\,.$$

Da nun der Schnittpunkt der Tangenten immer außerhalb der Parabel, der Halbierungspunkt der Berührungssehne innerhalb der Parabel liegt, so ist nur das Pluszeichen möglich, und wir erhalten den Satz:

Die Parabel halbiert die Verbindungsstrecke zwischen dem Schnittpunkte zweier Tangenten und dem Halbierungspunkte der zugehörigen Berührungssehne.

Daß dabei auch die Tangente, gezogen im Parabelschnittpunkte dieser Verbindungsstrecke, der Berührungssehne parallel wird, folgt daraus, daß beide denselben Richtungskoeffizienten haben. Denn der Richtungskoeffizient der Berührungssehne $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ist nach der Parabelgleichung gleich:

$$\frac{2\,p}{y_1 + y_2}\,,$$

wofür, wie oben erkannt ist, auch

$$\frac{p}{y_5}$$

gesetzt werden kann. Dieser Quotient ist aber auch der Richtungskoeffizient der Tangente in dem er-

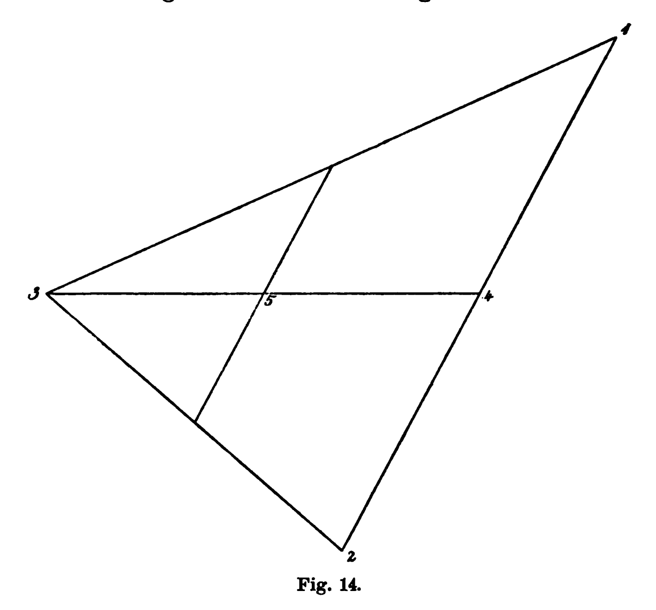


Fig. 14.

wähnten Parabelschnittpunkte, weil die Gleichung der letzteren

$$y\,y_5 = p\,(x + x_5)$$

lautet. Hiernach muß die Tangente im Parabelschnittpunkte auch die beiden Strecken halbieren, welche

auf den beiden Tangenten durch deren Schnittpunkt und durch deren Berührungspunkte begrenzt werden.

Aus zwei Parabeltangenten mit den Berührungspunkten A und B und dem Schnittpunkte O erhält man also eine dritte Tangente, indem man den Halbierungspunkt A' von OA und den Halbierungspunkt B' von OB verbindet. Der Halbierungspunkt C von $A'B'$ ist der Berührungspunkt der dritten Tangente. (Fig. 14).

§ 2. Erzeugung der Parabel aus vier Tangenten.

Wenn (Fig. 15) zwei Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, die sich in O schneiden, von drei Tangenten mit den Berührungspunkten C, D, E geschnitten werden und die Ordinaten der sechs Schnittpunkte bzw.:

$$c_a, d_a, e_a; \quad c_b, d_b, e_b$$

heißen, während die Ordinaten der Berührungspunkte A, B, C, D, E bzw.:

$$a, b; \quad c, d, e$$

heißen, so müssen nach dem in § 1 bewiesenen Satze, wonach die Ordinate des Schnittpunktes zweier Tangenten das arithmetische Mittel der Ordinaten ihrer Berührungspunkte ist, die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$\left\{\begin{aligned} 2c_a &= a + c \\ 2d_a &= a + d \\ 2e_a &= a + e \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} 2c_b &= b + c \\ 2d_b &= b + d \\ 2e_b &= b + e \end{aligned}\right\}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,c_a - 2\,d_a = c - d = 2\,c_b - 2\,d_b \\ 2\,c_a - 2\,e_a = c - e = 2\,c_b - 2\,d_b \end{array}\right\},$$

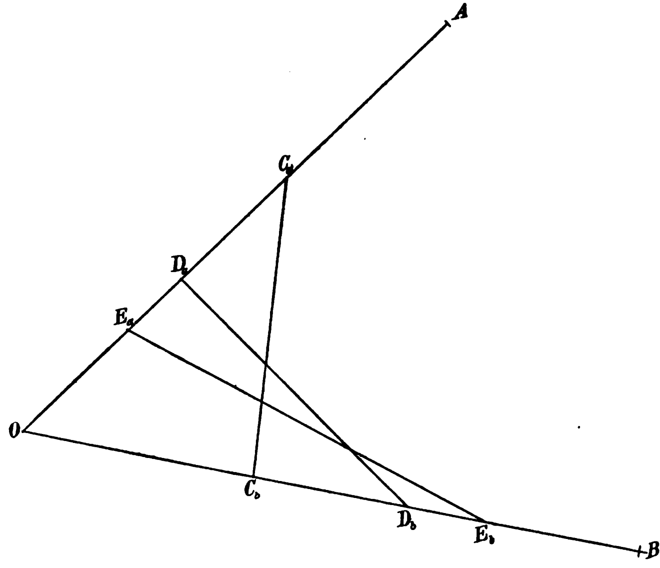


Fig. 15.

oder:

$$(1) \qquad \frac{c_a - d_a}{c_a - e_a} = \frac{c_b - d_b}{c_b - e_b}\,.$$

Nun sind aber einerseits die drei Ordinaten c_a, d_a, e_a, andererseits auch c_b, d_b, e_b parallele Strahlen.

auf den beiden Tangenten durch deren Schnittpunkt und durch deren Berührungspunkte begrenzt werden.

Aus zwei Parabeltangenten mit den Berührungspunkten A und B und dem Schnittpunkte O erhält man also eine dritte Tangente, indem man den Halbierungspunkt A' von OA und den Halbierungspunkt B' von OB verbindet. Der Halbierungspunkt C von $A'B'$ ist der Berührungspunkt der dritten Tangente. (Fig. 14).

§ 2. Erzeugung der Parabel aus vier Tangenten.

Wenn (Fig. 15) zwei Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, die sich in O schneiden, von drei Tangenten mit den Berührungspunkten C, D, E geschnitten werden und die Ordinaten der sechs Schnittpunkte bzw.:

$$c_a, d_a, e_a; \quad c_b, d_b, e_b$$

heißen, während die Ordinaten der Berührungspunkte A, B, C, D, E bzw.:

$$a, b; \quad c, d, e$$

heißen, so müssen nach dem in § 1 bewiesenen Satze, wonach die Ordinate des Schnittpunktes zweier Tangenten das arithmetische Mittel der Ordinaten ihrer Berührungspunkte ist, die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$\left\{\begin{array}{l} 2c_a = a + c \\ 2d_a = a + d \\ 2e_a = a + e \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} 2c_b = b + c \\ 2d_b = b + d \\ 2e_b = b + e \end{array}\right\}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,c_a - 2\,d_a = c - d = 2\,c_b - 2\,d_b \\ 2\,c_a - 2\,e_a = c - e = 2\,c_b - 2\,d_b \end{array}\right\},$$

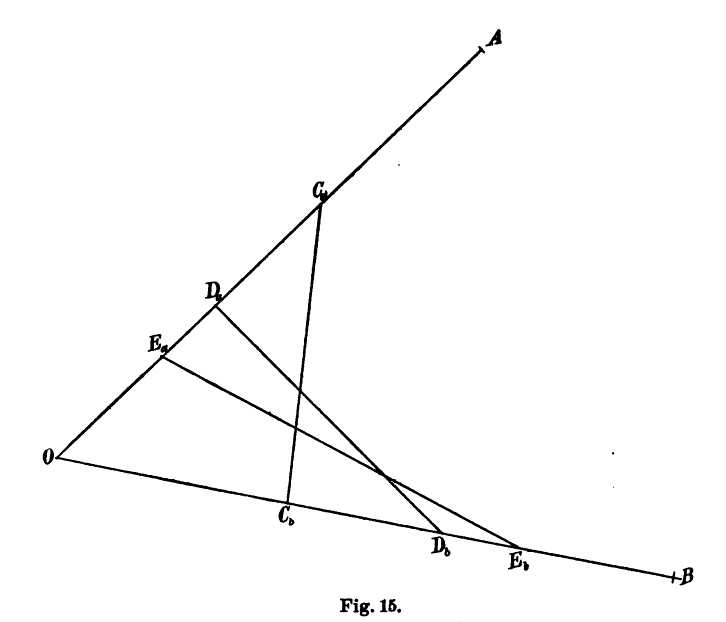


Fig. 15.

oder:

$$\frac{c_a - d_a}{c_a - e_a} = \frac{c_b - d_b}{c_b - e_b}\,. \tag{1}$$

Nun sind aber einerseits die drei Ordinaten c_a, d_a, e_a, andererseits auch c_b, d_b, e_b parallele Strahlen.

Deshalb kann man die Gleichung (1) nach den Proportionallehrsätzen ersetzen durch:

$$\frac{C_a D_a}{C_a E_a} = \frac{C_b D_b}{C_b E_b}, \tag{2}$$

womit bewiesen ist, daß auf den beiden zugrunde gelegten Tangenten OA und OB die drei anderen Tangenten mit den Berührungspunkten C, D, E proportionale Abschnitte hervorrufen. Wenn einer der Schnittpunkte, etwa E_a, mit dem Berührungspunkte A zusammenfällt, so muß der zugehörige Schnittpunkt E_b mit O zusammenfallen und umgekehrt, wenn E_a in O fällt, muß E_b in den Berührungspunkt B fallen.

Die soeben bewiesene Eigenschaft der Parabel führt auch zu einer eleganten Erzeugung der Parabel, falls von ihr als gegeben vorliegen:

1. vier Tangenten;
2. drei Tangenten und einer ihrer drei Berührungspunkte;
3. zwei Tangenten und deren beide Berührungspunkte.

Um z. B. die Parabel im dritten dieser drei Fälle zu erzeugen, tut man am besten, von den Tangenten OA und OB auszugehen und sowohl OA, als auch OB in n gleiche Teile zu teilen. Jede Verbindungslinie zweier Teilpunkte ergibt dann eine der gesuchten Parabeltangenten, wenn der eine Schnittpunkt der i-te von A aus ist und der andere der i-te von O

aus ist, oder umgekehrt, der eine der i-te von O aus, der andere der i-te von B aus. (Vgl. Fig. 16).

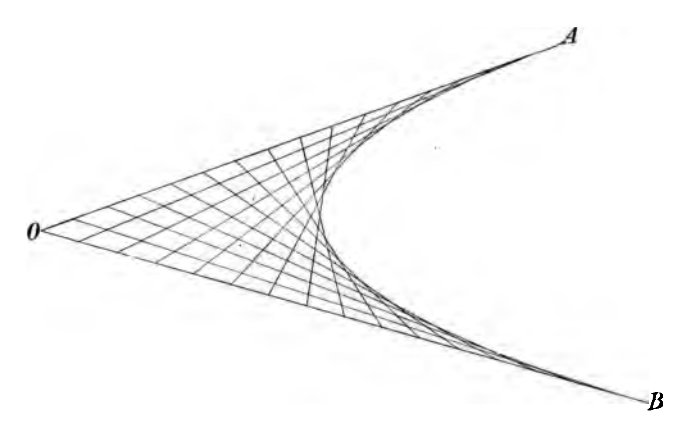


Fig. 16.

§ 3. Die Quadratur eines beliebigen Parabelsegmentes.

Ein Parabelsegment wird von dem zwischen zwei Punkten A und B liegenden Parabelbogen und der Strecke AB, der Parabelsehne, begrenzt. Wenn man die Tangenten in A und B zeichnet, die sich in O schneiden, so erscheint das Dreieck OAB, das Grunddreieck heißen soll, durch die Parabel in zwei Gebiete zerlegt, das Parabelsegment und das von den beiden Tangenten und dem Parabelbogen begrenzte Gebiet, das wir Außengebiet nennen

wollen. Nach dem Schlußsatze von § 1 ist die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte A' und B' von OA und OB eine dritte Tangente der Parabel, deren Berührungspunkt C auch $A'B'$ halbiert. So wird von dem Außengebiete ein Dreieck $OA'B'$ abgeschnitten, das wir Außendreieck nennen wollen, und dessen Inhalt ein Viertel vom Inhalte OAB des zugehörigen Grunddreiecks ist. Verbindet man noch den Berührungspunkt C der dritten Tangente mit A und mit B, so wird auch vom Segmente ein Dreieck CAB abgeschnitten, dessen Inhalt die Hälfte vom Inhalte des Grunddreiecks OAB ist. Denn dieses Dreieck CAB, das wir Innendreieck nennen wollen, hat mit dem Grunddreieck OAB die Seite AB gemein, während die zugehörigen Höhen sich wie 1 zu 2 verhalten, weil OC die Hälfte der Strecke von O bis zum Halbierungspunkte der Sehne AB ist. Demnach gehören zu jedem Grunddreieck OAB ein Außendreieck $OA'B'$ und ein Innendreieck CAB, deren Inhalte sich wie 1 zu 2 verhalten, indem $OA'B'$ ein Viertel, CAB die Hälfte vom Grunddreieck OAB ist. (Vgl. Fig. 17.) Das restierende vierte Viertel dieses Grunddreiecks, das wir Restgebiet nennen wollen, besteht aus einem Teile des Außengebietes und einem Teile des Parabelsegmentes. Dieses Restgebiet besteht ferner aus zwei Dreiecken $A'CA$ und $B'CB$, die wiederum Grunddreiecke sind, und auf deren jedes die obigen Betrachtungen anwendbar sind. So erzeugt

ein Grunddreieck OAB zwei abgeleitete neue Grunddreiecke $A'CA$ und $B'CB$, und in jedem von diesen liegt wieder ein Außendreieck und ein Innendreieck, deren Inhalte sich wie 1 zu 2 verhalten.

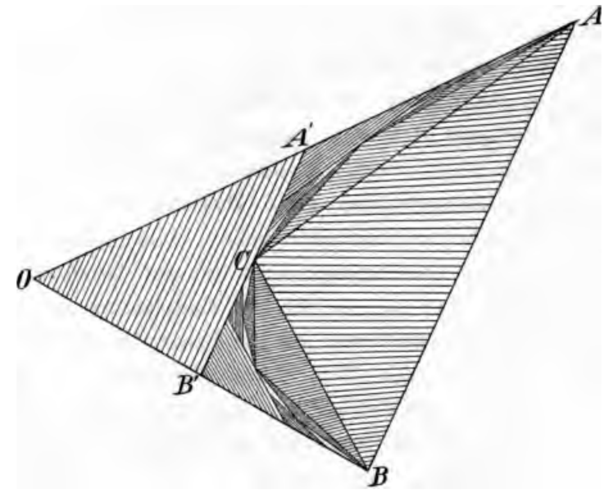


Fig. 17.

Da auch jedes von diesen zwei Grunddreiecken zu zwei neuen Grunddreiecken führt usw., so erhalten wir $2p$ abgeleitete Grunddreiecke p-ter Stufe, in deren jedem ein Außendreieck und ein Innendreieck liegen, deren Inhalte sich wie 1 zu 2 verhalten, wo p eine beliebig große ganze Zahl ist. Also muß auch die bis zu einem beliebigen p fortgesetzte Summe

aller Außendreiecke sich zu der bis zu demselben p fortgesetzten Summe aller Innendreiecke wie 1 zu 2 verhalten. Die Summe aller so erzeugten Außendreiecke ergibt aber das ganze Außengebiet und die Summe aller Innendreiecke das Parabelsegment. Demnach muß in jedem von zwei Tangenten einer Parabel und der Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte begrenzten Grunddreieck der Inhalt des Außengebietes sich zum Inhalte des Parabelsegmentes verhalten wie 1 zu 2. Demnach beträgt der Inhalt eines Parabelsegmentes zwei Drittel vom Inhalte des zugehörigen Grunddreiecks. Um daher den Inhalt eines Parabelsegmentes in ein Quadrat zu verwandeln, hat man nur in den Endpunkten der begrenzenden Parabelsehne AB die Tangenten zu ziehen, die sich in O schneiden, durch Drittelung von AB ein Dreieck abzuschneiden, das zwei Drittel des Dreiecks OAB ist und das so entstandene Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Nachdem einmal erkannt ist, daß das Parabelsegment zwei Drittel des Dreiecks OAB ist, lassen sich leicht viele andere Konstruktionen ableiten. So kann man zwei Drittel von OAB auch dadurch erhalten, daß man durch A und B Parallele mit OC, d. h. mit der Parabelachse, zieht, auf diesen Parallelen zwei Drittel von OC abschneidet. Man hat dann, um ein dem Parabelsegment flächengleiches Quadrat zu erhalten, das entstandene Parallelogramm in ein Quadrat

zu verwandeln. Diese Konstruktion führt auch leicht zu der bekannten Formel, welche das Parabelsegment durch die Ordinaten y_1 und y_2 der begrenzenden Parabelpunkte A und B und den Parameter p der Parabel ausdrückt, nämlich:

$$\frac{(y_1 - y_2)^3}{12p}.$$

III. Abschnitt.

Das Snelliussche Brechungsgesetz.

Das Fermatsche Prinzip, nach welchem in der Natur die Veränderungen so vor sich gehen, daß die dabei geleistete Arbeit möglichst klein sei, ist im Einklang mit dem Reflexionsgesetze. Denn nach diesem muß ein Lichtstrahl, der die Trennungsschicht zweier Medien trifft, so zurückgeworfen werden, daß erstens das Einfallslot, d. h. das Lot, errichtet auf der Trennungsschicht in dem Punkte, wo sie von dem Lichtstrahle getroffen wird, mit dem ankommenden Strahle und dem reflektierten Strahle in einer und derselben Ebene liegt und daß zweitens das Einfallslot mit dem reflektierten Strahle denselben Winkel bildet wie mit dem ankommenden Strahle. Indem der Lichtstrahl dieses Reflexionsgesetz befolgt, macht er in der Tat einen kürzeren Weg als ein Lichtstrahl, der denselben Ausgangspunkt und denselben Zielpunkt hat, wie der erste, dabei aber die Trennungsschicht in einem anderen Punkte trifft, als der Lichtstrahl, der das Reflexionsgesetz befolgt. Man kann dies leicht aus dem geometrischen Axiom ableiten, nach

welchem die Summe der Strecken $AB + BA'$ kürzer ist, wenn B auf der geraden Verbindungsstrecke zwischen A und A' liegt, als wenn B außerhalb dieser Strecke liegt.

Auch vom Snelliusschen Brechungsgesetze, welches sich auf den Eintritt eines Lichtstrahles aus einem ersten Medium in ein zweites Medium bezieht, läßt sich leicht nachweisen, daß es mit dem Fermat-

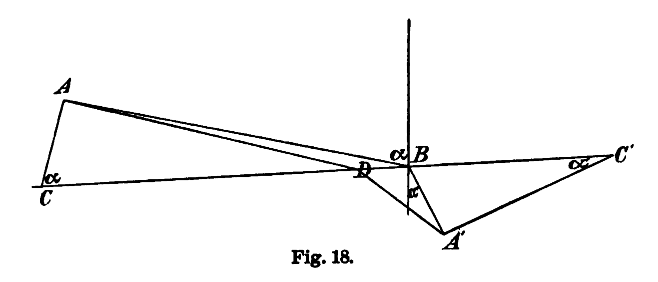


Fig. 18.

schen Prinzip in Einklang ist. Nach diesem Brechungsgesetz muß ein Lichtstrahl aus einem ersten Medium in ein zweites so eintreten, daß erstens wiederum das Einfallslot mit dem Lichtstrahle im zweiten Medium in derselben Ebene liegt, wie mit dem Lichtstrahle im ersten Medium und daß zweitens die Sinusse der beiden Winkel, die dabei mit dem Einfallslote im ersten Medium und im zweiten Medium gebildet werden, sich verhalten wie die Geschwindigkeiten, mit denen der Lichtstrahl die beiden Medien durcheilt. Sind also (vgl. Fig. 18) α und α' die

beiden genannten Winkel, v und v' die entsprechenden Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien, so soll nach dem Brechungsgesetze:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v}{v'} \tag{1}$$

sein.

Es läßt sich nun ganz elementar nachweisen, daß der Lichtstrahl, der von A nach A' gelangt, indem er, das Brechungsgesetz befolgend, die Trennungsschicht im Punkte B durchbricht, weniger Zeit dazu braucht, als wenn er die Trennungsschicht in einem anderen Punkte D durchbricht. Um dieses zu beweisen, errichten wir in A auf AB das Lot, das die Trennungsschicht im Punkte C trifft, und in A' auf $A'B$ das Lot, das die Trennungsschicht im Punkte C' trifft. Dann ist auch der Winkel $ACB = \alpha$ und $A'C'B = \alpha'$. Es ist nun nachzuweisen, daß unter Voraussetzung der Gleichung (1) die Zeitdauer, die der Lichtstrahl zum Wege ABA' braucht, kleiner ist, als die Zeitdauer, die ein Lichtstrahl zum Wege ADA' brauchen würde. Dabei erinnere man sich, daß die Zeitdauer, die ein Lichtstrahl zu einem Wege braucht, gleich dem Verhältnis dieses Weges zu der Geschwindigkeit ist, mit der er diesen Weg durchläuft. Wenn wir demgemäß:

$$\tau = \frac{AB}{v} + \frac{BA'}{v'} \tag{2}$$

und:

$$t = \frac{AD}{v} + \frac{DA'}{v'} \tag{3}$$

setzen, so ist nachzuweisen, daß $\tau < t$ ist. Die dabei vorausgesetzte Gleichung (1) schreiben wir so:

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{v'} = w\,, \tag{4}$$

so daß wir also für das in beiden Medien übereinstimmende Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels zur Geschwindigkeit die Abkürzung w einführen. Dadurch kommt aus (2):

$$\tau = \frac{AB \cdot w}{\sin\alpha} + \frac{BA'w}{\sin\alpha'} \tag{5}$$

oder, da BAC und $BA'C$ rechte Winkel sind:

$$\tau = w \cdot (CB + BC') = w \cdot CC' = w(CD + DC')\,. \tag{6}$$

Andererseits erhalten wir auch:

$$t = w\left(\frac{AD}{\sin\alpha} + \frac{DA'}{\sin\alpha'}\right). \tag{7}$$

Wenden wir nun den trigonometrischen Satz an, daß durch Division einer Sehne durch den Sinus des gegenüberliegenden Peripheriewinkels der Durchmesser des Kreises entsteht, dem die Sehne angehört, so ergibt sich aus (7):

$$t = w(d + d')\,, \tag{8}$$

wo d den Durchmesser des Umkreises um ADC, d' den Durchmesser des Umkreises um $A'D'C$ bedeutet.

Wenn wir mit dieser Gleichung die Gleichung (6) vergleichen, nach welcher $\tau = w(CD + DC')$ ist, und dabei beachten, daß CD als Sehne kleiner ist als der zugehörige Durchmesser d, und daß DC' ebenso kleiner ist als d', so erkennen wir, daß

$$\tau < t$$

ist, was bewiesen werden sollte.

IV. Abschnitt.

Der Parallelkantner und die allgemeine Volumenbestimmung.

§ 1. Einleitendes.

Vom geraden Prisma aus kann man in zwei Verallgemeinerungsrichtungen zu allgemeineren Polyedern gelangen, deren Volumen sich leicht bestimmen läßt. Von diesen Richtungen pflegt man in der elementaren Stereometrie gewöhnlich nur diejenige einzuschlagen, welche über den Pyramidenstumpf zum Obelisken oder zum Prismatoid führt, das als ein Obelisk aufgefaßt werden kann, bei welchem die Seitenflächen, die im allgemeinen Trapeze sind, sämtlich zu Dreiecken spezialisiert sind. In dieser Verallgemeinerungsrichtung hat man den Seitenkanten des geraden Prismas eine allgemeinere Lage gegeben, aber die Parallelität der beiden Grundflächen des geraden Prismas festgehalten. In der anderen Verallgemeinerungsrichtung, die hier besprochen werden soll, gibt man den beiden Grundflächen eine allgemeinere Lage, hält aber die Parallelität der Seitenkanten fest. Das allgemeinste Polyeder, auf das man in dieser Verallgemeinerungs-

richtung kommt, ist also ein prismatischer Raum, der von n Ebenen begrenzt wird, die sich, der Reihe nach, in n parallelen Kanten schneiden und von zwei beliebig liegenden Ebenen, auf denen die n parallelen Kanten die Eckpunkte zweier n-Ecke bestimmen, die man Grundflächen nennen wird. Das so entstehende Polyeder, das wir passend Parallelkantner nennen wollen, wird also, ebenso wie der Obelisk, von $n + 2$ Flächen begrenzt, nämlich zwei Grundflächen, die n-Ecke sind und n Seitenflächen, die Trapeze sind. Während aber beim Obelisken die Grundlinien der n Trapeze die Seiten der n-Ecke sind, so sind beim Parallelkantner die Schenkel der n Trapeze die Seiten der n-Ecke, während die n Grundlinien der n Trapeze alle einander parallel sind.

Auch bezüglich der Bestimmungszahl[1]), d. h. der Anzahl der im allgemeinen zur Konstruktion erforderlichen einfachen Bedingungen, unterscheiden sich die beiden Verallgemeinerungen des geraden Prismas sehr wesentlich. Wenn die Lage mit zu bestimmen ist, so ist der Obelisk durch die n Ebenen bestimmt, in denen die n Seitenflächen liegen sollen und durch das Paar paralleler Ebenen, in denen die Grundflächen liegen sollen. Seine Bestimmungszahl ist deshalb

$$c = 3 \cdot n + 3 \cdot 2 - 2 = 3n + 4 .$$

---

[1]) Vgl. in dieser „Auslese", Band I, Abschnitt VIII.

Der Parallelkantner hingegen ist bestimmt, wenn von ihm die Lage der n parallelen Kanten und die Lage der beiden Ebenen bestimmt ist, in denen die Grundflächen liegen. Da ein Strahl im Raume durch vier einfache Bedingungen bestimmt und zur Bestimmung eines Strahles, der eine vorgeschriebene Richtung hat, zwei weitere einfache Bedingungen erforderlich sind, so sind

$$4 + 2(n - 1) = 2n + 2$$

einfache Bedingungen erforderlich, um die Lage der n parallelen Strahlen festzustellen. Zur Bestimmung des Parallelkantners treten dann noch die zweimal drei Bedingungen hinzu, durch welche die Ebenen bestimmt sind, in denen die Grundflächen liegen, so daß sich für die Bestimmungszahl c' des Parallelkantners ergibt:

$$c' = 2n + 8 .$$

Da nun ein von zwei n-Ecken, n Vierecken, $2n$ Ecken und $3n$ Kanten begrenztes Polyeder im allgemeinen die Bestimmungszahl $3n + 6$ [1]) hat, so ist der Obelisk eine zweistufige Spezialisierung, der Parallelkantner hingegen eine $(n - 2)$-stufige Spezialisierung dieses allgemeinen Polyeders.

Während bei der Verallgemeinerungsrichtung, die vom Prisma zum Obelisken führt, und bei der die Parallelität der Ebenen der beiden Grundflächen fest-

[1]) Vgl. in dieser „Auslese“, Band I, Abschnitt VIII.

gehalten wird, der Abstand derselben, die man Höhe nennt, in allen Volumenformeln als der eine Faktor bleibt, so bleibt in der zweiten Verallgemeinerungsrichtung, die vom geraden Prisma zum Parallelkantner führt, der Inhalt des Polygons bestehen, das auf einer Ebene, welche die n Kanten senkrecht schneidet, durch die Schnittpunkte mit diesen n Kanten gebildet wird. Der konstante Inhalt aller solcher Polygone, die auf den die n Kanten senkrecht scheidenden Ebenen entstehen, soll Normalschnitt des Parallelkantners heißen. Im folgenden wird nun gezeigt, daß das Volumen jedes Parallelkantners gleich dem Produkte des Normalschnittes mit der Strecke ist, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet und zugleich parallel der n Kanten des Parallelkantners sein muß.

§ 2. Volumen des dreikantigen schief abgeschnittenen geraden Prismas.

Wenn man den Raum zwischen drei einander parallelen Strahlen durch eine sie senkrecht schneidende Ebene und eine sie schief schneidende Ebene abgrenzt, so entsteht der Körper, dessen Volumen wir bestimmen wollen. Die senkrecht schneidende Ebene möge die drei Strahlen in A, B, C und die schief schneidene Ebene entsprechend in A', B', C' schneiden. Dann wird der Körper von zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$, sowie von drei Trapezen $ABA'B'$, $BCB'C'$,

$CAC'A'$ begrenzt. Die auf den drei Strahlen durch den Schnitt mit den beiden Ebenen entstehenden drei Strecken AA', BB', CC' mögen beziehungsweise a, b, c heißen. $AA' = a$ sei die kleinste der drei Strecken. Legt man nun durch A' eine Ebene, die parallel mit der Ebene ABC geht und BB' in B'', CC' in C'' schneidet, so zerfällt unser Körper in ein gerades dreikantiges Prisma $ABC\,A'B''C''$, dessen Grundfläche das Dreieck ABC und dessen Höhe a ist, und in einen Restkörper, dessen fünf Ecken A', B', C', A'', B'' sind. Dieser Restkörper ist nun eine Pyramide, deren Grundfläche das Trapez $B'B''C''C'$ ist und dessen Spitze A' ist. Die parallelen Seiten dieses Trapezes sind $b - a$ und $c - a$, ihr Abstand sei p, während die Höhe der Pyramide das Lot ist, das von A auf die Ebene zwischen BB' und CC' gefällt werden kann und h heißen möge, so daß das Volumen des Restkörpers ist:

$$\frac{h}{3} \cdot \frac{(b-a)+(c-a)}{2} \cdot p = \frac{p\,h}{6}(b+c-2a)\,.$$

Zu diesem Volumen ist noch das Volumen des geraden dreikantigen Prismas zu addieren, um das gesuchte Volumen des schief abgeschnitten dreikantigen geraden Prismas zu erhalten. Der Inhalt der Grundfläche ABC des geraden dreikantigen Prismas ist aber das halbe Produkt der Strecke BC mit dem Lote, gefällt von A auf BC. Da BB' und CC' immer

denselben Abstand haben, so ist BC gleich der Strecke, die oben p genannt ist, während das Lot, gefällt von A auf BC, mit dem oben h genannten Lote von A auf die Ebene zwischen BB' und CC' übereinstimmt. Da ferner die Höhe des geraden dreikantigen Prismas $ABCC'B'A'$ a ist, so erhalten wir für dessen Volumen

$$\frac{ph}{2} \cdot a .$$

Demnach ergibt sich für das Volumen V des schief abgeschnittenen geraden Prismas:

$$V = \frac{p \cdot h}{2} \cdot a + \frac{ph}{6} \cdot (b + c - 2a) = \frac{p \cdot h}{2} \cdot \frac{a + b + c}{3} .$$

Nun ist aber $\frac{p \cdot h}{2}$ der Inhalt des Dreiecks, das durch eine Ebene entsteht, die die drei parallelen Kanten senkrecht schneidet, so daß wir das bekannte Resultat erhalten:

Das Volumen des schief abgeschnittenen dreikantigen geraden Prismas ist gleich dem Produkte des Dreiecks, das durch einen senkrechten Schnitt entsteht, mit dem arithmetischen Mittel der Längen der drei parallelen Kanten.

Diesem Resultate läßt sich noch eine für weitere Folgerungen wichtige andere Form geben. Ist nämlich D' die Mitte von $B'C'$, D die Mitte von BC, so ist $DD' = \frac{1}{2}(BB' + CC') = \frac{1}{2}(b + c)$. Der Schwer-

punkt S' des Dreiecks $A'B'C'$ liegt nun auf $A'D'$, und zwar $A'D'$ im Verhältnis 2 zu 1 teilend. Genau so liegt der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC auf AD, so daß

$$S'S = \tfrac{1}{3} \cdot A'A + \tfrac{2}{3} \cdot D'D$$
$$= \tfrac{1}{3} a + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(b + c) = \tfrac{1}{3}(a + b + c)$$

ist. Da überdies $S'S$ senkrecht auf der Ebene des Dreiecks ABC sein muß, so können wir dem oben ausgesprochenen Resultate auch die folgende Form geben:

Das Volumen des schief abgeschnittenen dreikantigen geraden Prismas ist gleich dem Produkte des Dreiecks, das durch einen senkrechten Schnitt entsteht, mit dem Lote, gefällt von dem Schwerpunkte des durch den schiefen Schnitt entstehenden Dreiecks auf die Ebene des senkrechten Schnittes.

Hat man nun allgemeiner drei parallele Kanten, deren Verbindungsebenen und außerdem zwei die parallelen Kanten beliebig schneidende Ebenen, so begrenzen die fünf Ebenen einen Fünfflächner, dessen Volumen sich nach dem Obigen auch leicht bestimmen läßt, weil er als die Summe oder die Differenz zweier Fünfflächner von der soeben betrachteten Art aufgefaßt werden kann. Demnach erhalten wir den Satz:

Ein Fünfflächner, von dessen neun Kanten drei einander parallel sind, hat als Volumen das Produkt, das man erhält, wenn man den

Inhalt eines durch eine die drei parallelen Kanten senkrecht schneidende Ebene entstehenden Dreiecks mit dem Abstande der Schwerpunkte der beiden den Fünfflächner begrenzenden Dreiecke multipliziert.

Man beachte, daß der Fünfflächner, dessen Volumen soeben bestimmt ist, wegen der Parallelität von dreien seiner neun Kanten, kein ganz allgemeiner ist, aber doch nur um eine Stufe spezieller ist, als der allgemeine. Denn seine Konstantenzahl ist acht, während der allgemeine Fünfflächner die Konstantenzahl neun besitzt (vgl. hierüber diese Auslese, Bd. I, Abschnitt VIII). Bekanntlich gibt es bezüglich der begrenzenden Polygone zwei Arten von Fünfflächnern, solche, die, wie der soeben betrachtete, von drei Vierecken und zwei Dreiecken begrenzt werden, und solche, die von einem Viereck und vier Dreiecken begrenzt werden. Die letztgenannte Art ist deshalb spezieller, weil bei ihr nicht neun, sondern nur acht Grenzkanten vorhanden sind und demnach die Konstantenzahl nicht neun, sondern acht ist. Sie ist nichts anderes als eine über dem Viereck stehende Pyramide. Dieselbe wird zu einem Fünfflächner von der oben betrachteten Art, wenn das Viereck speziell zu einem Trapez wird. Umgekehrt entsteht diese Pyramide mit der Konstantenzahl sieben aus unserem oben betrachteten Fünfflächner, wenn eine der drei parallelen Kanten die Länge Null erhält.

§ 3. Volumen des allgemeinen Parallelkantners.

Eine Ebene, die zwei einander parallelen Kanten parallel ist, muß nach den Proportionallehrsätzen jede Strecke, die zwei Punkte der parallelen Kanten verbindet, nach konstantem Verhältnis teilen. Hiervon ist schon in § 2 Gebrauch gemacht, um zu erkennen, daß die Verbindungslinie der Schwerpunkte zweier Dreiecke, deren Ecken einem Tripel paralleler Kanten angehören, diesen Kanten parallel ist. Jedem Tripel paralleler Kanten gehört also eine diesen Kanten parallele Schwerpunktsgerade zu, insofern, als sie der Ort für die Schwerpunkte aller Dreiecke ist, deren Ecken die Schnittpunkte der drei parallelen Kanten mit einer beliebigen Ebene des Raumes sind. Insbesondere gehören zu diesen Dreiecken auch die, deren Ebenen das Kantentripel senkrecht schneiden, und die wir, in Übereinstimmung mit § 1, Normalschnitte nennen wollen. Hat man nun eine Gruppe von vier einander parallelen Kanten, so beachte man, daß der Schwerpunkt eines Vierecks auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Dreiecke liegt, in welche das Viereck durch eine Diagonale zerlegt wird, und zwar teilt der Schwerpunkt diese Strecke im umgekehrten Verhältnisse der Inhalte dieser Dreiecke. Deshalb muß es nach den Proportionallehrsätzen auch bei vier parallelen Kanten eine ihnen parallele Schwerpunktsgerade geben, die der Ort für die Schwerpunkte aller Vierecke ist, deren Ecken entstehen,

wenn die vier parallelen Kanten von einer beliebigen Ebene geschnitten werden. Beachtet man nun noch die in Abschnitt I dieses Bandes bewiesene Momentengleichung, indem man eine beliebige Normalschnittebene als die Ebene betrachtet, auf welche die Momente bezogen werden, so erhält man den Satz:

Für einen Sechsflächner, der aus vier parallelen Strahlen dadurch entsteht, daß man erstens viermal zwei von ihnen durch eine Ebene verbindet, daß man zweitens eine Ebene senkrecht zu den vier Strahlen legt, und daß man drittens eine ganz beliebige Ebene die vier Strahlen schneiden läßt, erhält man das Volumen, indem man den Inhalt des Normalschnittes, d. h. des Vierecks, das auf der senkrecht schneidenden Ebene entsteht, mit dem Lote multipliziert, das vom Schwerpunkte des auf der schief schneidenden Ebene entstandenen Vierecks auf die Ebene des Normalschnittes gefällt werden kann.

Die Übertragung auf einen Sechsflächner, der in derselben Weise entsteht, wenn zwei Ebenen die vier Strahlen beide schief schneiden, geschieht wieder durch Addition oder Subtraktion; immer aber beachte man, daß der Schwerpunktsabstand mit dem Inhalte eines Normalschnittes zu multiplizieren ist, d. h. eines Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte

der vier Strahlen mit einer Ebene sind, die die vier Strahlen senkrecht trifft.

Genau so wie in Abschnitt I dieses Bandes die Schwerpunktsbestimmung vom Viereck auf das Fünfeck und auf das allgemeine n-Eck übertragen werden konnte, so können wir auch unsere Volumenbestimmung auf das durch fünf oder n parallele Kanten erzeugte Polyeder übertragen.

Man erhält also das Volumen eines allgemeinen Parallelkantners, der von n Trapezen begrenzt wird, die sich in n parallelen Kanten schneiden und außerdem von zwei Polygonen, deren Ebenen diese n Kanten beliebig schneiden, indem man die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte dieser beiden Polygone mit dem Inhalte des Normalschnittes multipliziert, d. h. eines Polygons, dessen Ecken die Schnittpunkte der n Kanten mit einer sie alle senkrecht treffenden Ebene sind.

Als ich diesen Satz bei der Präporation auf meine Vorlesungen über Stereometrie gefunden hatte, teilte ich ihn mehreren namhaften Mathematikern mit, denen der Satz neu war. Endlich teilte mir Herr Busche-Hamburg mit, daß der Satz schon in Baltzers „Elementen der Math.“ (II. Band, S. 272 der 6. Auflage) enthalten sei. Trotzdem trug ich kein Bedenken, ihn meiner „Auslese“ einzuverleiben, da er wenig bekannt zu sein scheint.

Dieser Satz gilt natürlich auch noch, wenn von den n Kanten eine oder zwei die Länge Null haben, d. h. wenn die beiden Grenzpolygone eine oder zwei Ecken gemein haben. Ist letzteres der Fall und ist $n = 3$, so entsteht ein Tetraeder, dessen Volumen nach unserem Satze durch die Längen zweier Gegenkanten und ihren senkrechten Abstand ausgedrückt wird. Wenn nämlich AA', BB', CC' für $n = 3$ die drei Kanten des Parallelkantners sind und B' mit B, C' mit C zusammenfällt, so sind ABC und $A'BC$ die beiden Grenzpolygone des Parallelkantners und SS', die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte, muß nach dem Proportionallehrsatze gleich $\frac{a}{3}$ sein, wo a die Länge der Kante AA' bedeutet. Der Normalschnitt ist ein Dreieck, dessen eine Seite $BC = s$ ist und dessen Ebene auf $A'A$ senkrecht ist so daß der Inhalt des Normalschnittes gleich $\frac{s \cdot p}{2}$ ist, wenn p die Strecke ist, die zugleich auf den Gegenkanten s und a senkrecht ist. Hieraus ergibt sich das Volumen V des Tetraeders, ausgedrückt durch die beiden Gegenkanten s und a, sowie deren senkrechten Abstand p, nämlich:

$$V = \frac{a}{3} \cdot \frac{s \cdot p}{2}.$$

Diese Formel für das Volumen eines Tetraeders ergibt sich auch, wenn man das Tetraeder als ein

Prismatoid auffaßt, dessen Grundflächen g und g' Null sind, weil sie zu den Gegenkanten s und a zusammengeschrumpft sind, und dann bei der Anwendung der Formel für das Volumen eines Prismatoids beachtet, daß die Mittelfläche m ein Rechteck ist, dessen Seiten $\frac{1}{2}s$ und $\frac{1}{2}a$ sind, so daß sich ergibt:

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m) = \frac{p}{6}\left(0 + 0 + 4 \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{psa}{6}.$$

Andererseits gilt unser Satz auch noch, wenn n unendlich groß wird, also für einen Körper, der von einem prismatischen Raume beliebiger Gestalt und zwei Ebenen begrenzt wird. Für das Volumen V dieses Körpers ergibt sich:

$$V = g \cdot SS',$$

wo g der Inhalt eines Normalschnittes ist, also der Figur, die der Mantel des Körpers auf einer Ebene bestimmt, die auf allen Seitenlinien des Mantels senkrecht ist, und wo S und S' die Schwerpunkte der beiden ebenen Flächenstücke sind, die der Mantel auf zwei beliebigen Ebenen ausschneidet. Insbesondere ergibt sich also:

Errichtet man in allen Punkten einer Ellipse mit den Halbachsen a und b Lote auf der Ebene der Ellipse und legt man dann zwei beliebige Ebenen, so schneidet der von den Loten gebildete Zylindermantel auf diesen Ebenen zwei Ellipsen aus, deren Zentren die

Entfernung c voneinander haben mögen. Dann ist $V = ab\pi c$ das Volumen des von dem Zylindermantel und den beiden Ellipsen begrenzten Raumstückes.

§ 4. Das Volumen der Körper.

Den Inhalt eines beliebigen ebenen Polygons kann man bekanntlich am besten dadurch finden, daß man in der Ebene des Polygons einen beliebigen Strahl s annimmt, von den Ecken A_1, A_2, A_3, ... aus auf diesen Strahl s die Lote $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$, ... fällt, und dann auch von den Halbierungspunkten B_{12}, B_{23}, B_{34}, ... der Strecken $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, ... die Lote $B_{12} B'_{12}$, $B_{23} B'_{23}$, $B_{34} B'_{34}$, ... auf denselben Strahl s fällt. Dann gibt eine algebraische Summe der Produkte:

$$A'_1 A'_2 \cdot B_{12} B'_{12}\,,\quad A'_2 A'_3 \cdot B_{23} B'_{23}\,,\quad \ldots$$

stets den Inhalt des vorliegenden ebenen Polygons, und zwar hat man in dieser algebraischen Summe das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem der Strahl s von dem nach der Innenseite oder nach der Außenseite des Polygons gerichteten Halbstrahle des in B_{12} auf $A_1 A_2$, des in B_{23} auf $A_2 A_3$ usw. errichteten Lotes getroffen wird.

Diese Methode der Inhaltsbestimmung eines ebenen Polygons läßt sich auf beliebige Polyeder übertragen, und zwar mittels des in § 3 ausgesprochenen Satzes

über das Volumen beliebiger Parallelkantner. Man hat nur statt des angenommenen Strahles s eine Ebene E anzunehmen, statt der Seiten des Polygons die Flächen des Polyeders auf E zu projizieren, und statt von den Halbierungspunkten der Polygonseiten von den Schwerpunkten der Polyederflächen die Lote auf E zu fällen.

Um also das Volumen eines beliebigen Polyeders zu bestimmen, hat man die Schwerpunkte $S_1, S_2, \ldots S_f$ seiner f Flächen aufzusuchen, von diesen die Lote $S_1 S_1', S_2 S_2', \ldots S_f S_f'$ auf eine beliebig angenommene Ebene E zu fällen, und auf E die Projektionen $J_1', J_2', \ldots J_f'$ der f Flächen $J_1, J_2, \ldots J_f$ des Polyeders zu bestimmen. Dann ist das Volumen V des Polyeders gleich einer algebraischen Summe der f Produkte:

$$J_1 \cdot S_1 S_1', \quad J_2 \cdot S_2 S_2', \ldots, \quad J_f \cdot S_f S_f',$$

wo bei jedem Produkte das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem die Ebene E von dem nach der Innenseite oder nach der Außenseite des Polyeders gerichteten Halbstrahle des in S_i auf der zugehörigen Ebene errichteten Lotes getroffen wird.

Hierzu einige Beispiele:

1. Bei einem geraden Prisma nehme man als Ebene E die untere Ebene der Grundfläche mit dem

Inhalte g. Dann ist das Schwerpunktslot dieser Grundfläche Null, während das Schwerpunktslot der oberen Grundfläche, deren Inhalt auch g ist, die Höhe h ist. Ihre Projektion hat auch den Inhalt g, während die Projektionen der Seitenflächen sämtlich Null sind, so daß $g \cdot h$ als Volumen erscheint.

2. Bei einem schiefen Prisma kommt die Übereinstimmung der Formel $V = g \cdot h$ mit der obigen Volumenregel dadurch zustande, daß die Summe der Projektionen der Seitenflächen wegen der ihr angefügten Vorzeichenregel zu Null wird.

3. Bei einer Pyramide nehme man als Ebene E die Ebene der Grundfläche g an, so daß das Schwerpunktslot derselben Null ist. Die Projektionen aller Seitenflächen auf diese Ebene ergeben aber bei Beachtung der Vorzeichenvorschrift als Summe die Grundfläche g, während die Schwerpunktslote aller Seitenflächen übereinstimmend $\frac{1}{3}h$ sind, so daß sich $V = \frac{1}{3} \cdot g \cdot h$ ergibt.

4. Bei einem Pyramidenstumpfe nehme man als Ebene E die Ebene der unteren größeren Grundfläche mit dem Inhalte g an. Die auf ihr liegende Projektion der oberen Grundfläche ist ein Polygon, das dem Polygon kongruent ist, das die obere Grundfläche mit dem Inhalte g' bildet. Was aber die Seitenflächen aubetrifft, so sind dieselben sämtlich Trapeze, deren Projektionen auf die Ebene E zusammen den Inhalt $g - g'$ ergeben. Der Schwerpunkt

jedes solchen Trapezes liegt auf der Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte seiner parallelen Grundlinie b und b', und zwar diese im Verhältnis $2\,b' + b$ zu $2\,b + b'$ teilend, so daß der Schwerpunkt näher der größeren Seite b liegt. Da nun wegen der Ähnlichkeit der Polygone, die in den beiden parallelen Ebenen liegen, die mit b' bezeichneten Trapezseiten sich verhalten wie die mit b bezeichneten, so ergibt sich, daß die Schwerpunkte aller Trapeze in gleicher Höhe über der Ebene E liegen, nämlich in der Höhe:

$$h \cdot \frac{2\,b' + b}{3\,b' + 3\,b}.$$

Deshalb muß nach unserer allgemeinen Volumenregel der Pyramidenstumpf mit den Grundflächen g und g' und der Höhe h das Volumen:

$$V = h \cdot g' + \frac{h}{3} \cdot \frac{2\,b' + b}{b' + b} \cdot (g - g')$$

haben. Um hieraus die übliche Volumenformel zu erhalten, haben wir zu beachten, daß die Polygone mit den Inhalten g und g' ähnlich sind, und daß deshalb:

$$g : g' = b^2 : b'^2$$

oder:

$$b : b' = \sqrt{g} : \sqrt{g'}$$

und:

$$\frac{2\,b' + b}{b' + b} = \frac{2\sqrt{g'} + \sqrt{g}}{\sqrt{g'} + \sqrt{g}}$$

sein muß. Durch Einsetzen erhalten wir daher:

$$V = \frac{h}{3(\sqrt{g'} + \sqrt{g})} [3g'(\sqrt{g'} + \sqrt{g})$$

$$+ (2\sqrt{g'} + \sqrt{g})(g - g')] .$$

Da nun $g - g' = (\sqrt{g} - \sqrt{g'})(\sqrt{g} + \sqrt{g'})$ ist, so erhalten wir weiter:

$$V = \frac{h}{3} [3g' + (2\sqrt{g'} + \sqrt{g})(\sqrt{g} - \sqrt{g'})]$$

$$= \frac{h}{3} [3g' + 2\sqrt{gg'} - 2g' + g - \sqrt{gg'}]$$

$$= \frac{h}{3} [g + \sqrt{gg'} + g'] .$$

So hat sich also aus unserer allgemeinen Volumenregel die übliche Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes ergeben.

5. Für das Flächenstück, das zwischen der Abszissenachse, dem Bogen einer beliebigen Kurve und der das Kurvenstück abgrenzenden Ordinate y gelegen ist, erhält man in der Anwendung der Integralrechnung auf die analytische Geometrie:

$$\int y\,dx .$$

Demnach ist das Flächenstück, das zwischen der Ordinatenachse, demselben Kurvenbogen und der durch den Grenzpunkt gelegten Parallelen zu der Abszissenachse liegt:

$$xy - \int y\,dx .$$

Hierfür kann aber, wie die Integralrechnung lehrt,

$$\int x\, dy$$

gesetzt werden. Dasselbe Resultat erhält man aber auch für das zuzweit genannte Flächenstück, wenn man die unserer Volumenregel analoge Flächeninhaltsregel anwendet.

6. Für den Rotationskörper, den man erhält, wenn man das in 5. zuerst genannte Flächenstück um die X-Achse rotiert, ergibt sich das Volumen

$$\int y^2 \pi\, dx\,,$$

woraus folgt, daß der Körper zwischen der durch die Rotation entstandenen Fläche und der Y-Z-Ebene das Volumen:

$$y^2 \pi x - \int y^2 \pi\, dx$$

hat, wofür, nach den Regeln der Integralrechnung:

$$\int x \cdot 2\, y \pi\, dy$$

gesetzt werden kann. Dasselbe Resultat erhalten wir aber auch nach der oben entwickelten allgemeinen Regel für die Bestimmung der Volumina.

Dem an n-dimensionale Verallgemeinerungen gewöhnten Leser wird nicht entgangen sein, daß die Volumenbestimmung, die oben für die Ebene, also $n = 2$ und für den Raum, also $n = 3$ ausgesprochen ist, auch für ein beliebiges n Gültigkeit hat.

V. Abschnitt.

Über die Ausdehnung der Formel für das Volumen eines Obelisken.

§ 1. Einleitendes.

Die Ausdehnung der unter dem Namen „Simpsonsche Regel“ bekannten Formel

$$V = \frac{h}{6}[g + g' + 4m]$$

für das Volumen eines Obelisken oder Prismatoids auf allgemeinere Körper ist oft ungenau oder mißverständlich in die Stereometriebücher[1]) übergegangen. So schreibt z. B. Bohnert in § 51 seines in der „Sammlung Schubert“ erschienenen vorzüglichen Lehrbuches der Stereometrie: „Hat ein Körper die Eigenschaft, daß der Inhalt jedes Querschnittes durch den-

[1]) Genetische Stereometrie von Dr. Karl Heintze, bearbeitet von Franz Lucke, Leipzig, B. G. Teubner, 1886.

Elementare Stereometrie von Dr. E. Bohnert in Hamburg, Band IV meiner Sammlung von mathematischen Lehrbüchern.

selben parallel zu einer festen Ebene höchstens eine Funktion zweiten Grades seines Abstandes von der festen Ebene sind, sind g' und g der erste und der letzte derartige Querschnitt des Körpers, ist m sein Mittelschnitt und h der Abstand der beiden Grundflächen g und g' dieses Körpers, so ist der Inhalt P des beschriebenen Körpers bestimmt durch die Gleichung:

$$P = \frac{h}{6}(g + 4m + g')."$$

Im folgenden § 52 wird dann gezeigt, daß diese Volumenformel auch noch gilt, wenn die genannte Funktion vom dritten Grade ist. Dann aber heißt es am Schlusse von § 52: „Diese Betrachtung läßt sich nicht fortsetzen für solche Körper, deren Querschnittsinhalt eine Funktion höheren als dritten Grades ist. Der natürliche Grund dieser Unmöglichkeit ..." Hiernach muß der Leser denken, daß die Volumenformel

$$P = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

nicht mehr gültig bleibt, wenn die betreffende Funktion von höherem als dem dritten Grade ist. Im folgenden wird aber gezeigt, daß die Funktion auch höheren Grades sein kann, ja auch eine beliebige algebraische oder transzendente Funktion, und daß es nur darauf ankommt, den in dieser Funktion enthaltenen Konstanten gewisse leicht bestimmbare Werte

zu erteilen, um zu erreichen, erstens, daß das Volumen V des von dieser Funktion erzeugten Körpers sich durch die Höhe h, die beiden Grundflächen g und g' sowie die Mittelfläche m ausdrücken läßt, zweitens, daß dies durch die Formel

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

geschieht.

Sei y der Inhalt der Parallelfläche, die von der einen Grundfläche mit dem Inhalte g den Abstand $x \cdot h$ hat, so daß x eine veränderliche Zahl ist und

$$\begin{aligned} y &= g \quad \text{für} \quad x = 0\,, \\ y &= m \quad \text{für} \quad x = \tfrac{1}{2}\,, \\ y &= g' \quad \text{für} \quad x = 1 \end{aligned}$$

kommt. Allgemein ist dann:

$$V = \int_0^h y\,d(hx) = h \cdot \int_0^1 y\,dx\,.$$

Ist beispielsweise:

$$y = a + bx + cx^4(1 - \tfrac{2}{5}x)\,,$$

so erhält man:

$$V = h[a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{5}c - \tfrac{2}{5}c \cdot \tfrac{1}{6}]$$

oder:

$$V = h[a + \tfrac{1}{2}c + \tfrac{2}{15}c]\,.$$

Man kann nun leicht über die eingeführten drei Konstanten a, b, c so verfügen, daß, statt ihrer g, g', m in die Formel eintreten, wie man erhält,

wenn man in dem Ausdrucke für y $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ einsetzt. So erhält man:

$$g = a\,, \quad g' = a + b + \tfrac{3}{5}c\,, \quad m = a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{20}c\,.$$

Hieraus folgt durch Elimination von a:

$$m - g = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{20}c\,, \quad g' - g = b + \tfrac{3}{5}c\,,$$

und dann durch Elimination von b:

$$\begin{aligned} c &= 2g + 2g' - 4m\,, \\ b &= -\tfrac{11}{5}g - \tfrac{1}{5}g' + \tfrac{12}{5}m\,, \\ a &= g\,. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen in die oben angegebene Formel für V:

$$V = h \cdot \left[\frac{1}{6}g + \frac{1}{6}g' + \frac{2}{3}m\right] = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)\,.$$

Durch dieses Beispiel ist gezeigt, daß die Simpsonsche Formel auch gilt, wenn die erzeugende Funktion $y = f(x)$ fünften Grades ist. Man erkennt auch, daß die erzeugende Funktion nicht eine ganz allgemeine Funktion fünften Grades sein darf, damit für das Volumen die Simpsonsche Formel gelte. Die erzeugende Funktion muß vielmehr eine gewisse, im allgemeinen leicht zu erfüllende Bedingungsgleichung befriedigen, damit die Volumenformel

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

Gültigkeit habe. Diese Bedingungsgleichung ist hier ganz allgemein in § 3 abgeleitet. In § 2 wird nun

zunächst gezeigt, daß die genannte Volumenformel immer anwendbar ist, wenn die erzeugende Funktion $y = f(x)$ eine ganz allgemeine Funktion dritten Grades ist, was involviert, daß sie auch ersten oder zweiten Grades sein kann.

§ 2. Die erzeugende Funktion ist dritten oder höheren Grades.

Wenn $y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist, so erhalten wir dadurch, daß für $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ beziehungsweise $y = g$, $y = g'$, $y = m$ kommen soll, drei Bestimmungsgleichungen für die vier Konstanten a, b, c, d, woraus folgt, daß eine Konstante, es sei d, beliebig bleiben darf. Demgemäß erhalten wir:

$$g = a, \quad g' = a + b + c + d, \quad m = a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{8}d,$$

woraus folgt:

$$g' - g = b + c + d, \quad m - g = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{8}d$$

oder:

$$g' + g - 2m = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{3}{4}d,$$

so daß wir nun c, b, a durch g, g', m und d ausdrücken können, nämlich;

$$c = 2g + 2g' - 4m - \tfrac{3}{2}d,$$
$$b = -3g - g' + 4m + \tfrac{1}{2}d,$$
$$a = g.$$

Da $\int y\,dx$ in unserem Falle

$$ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}c \cdot x^3 + \tfrac{1}{4}dx^4$$

wird, so erhalten wir für V:

$$V = h[a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{4}d].$$

Wenn wir nun noch die soeben für c, b, a gefundenen Ausdrücke einsetzen, erhalten wir:

$$V = h \cdot [g \cdot (1 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3}) + g' \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}) \\ + m \cdot (2 - \tfrac{4}{3}) + d \cdot (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})]$$

oder:

$$V = h \cdot \left[\frac{1}{6} g + \frac{1}{6} g' + \frac{2}{3} m + d \cdot 0\right] = \frac{h}{6}[g + g' + 4m].$$

Da die Konstante d sich aufhebt, so konnte in der erzeugenden Funktion dieser Konstanten ein ganz beliebiger Wert erteilt werden. Wenn bei Einführung von mehr als drei Konstanten a, b, c, der besondere Fall, der soeben eintrat, daß nämlich der Koeffizient einer vierten Konstanten Null wird, nicht eintritt, hat man, um die Simpsonsche Formel

$$V = \frac{h}{6}[g + g' + 4m]$$

zu erzielen, diese vierten Konstanten selbst gleich Null zu setzen, d. h. sich mit der Einführung von drei Konstanten zu begnügen. Wenn man von vornherein weniger als drei Konstante einführt, so hat man, da zur Einführung von g, g', m drei Bedingungsgleichungen dienen, die Möglichkeit, unzählig viele Formeln zu bilden, in denen V durch h, g, g', m ausgedrückt ist, oder man kann dann V durch h und

die Inhalte von nur zwei Parallelflächen, etwa g und g', ausdrücken.

Um zu zeigen, daß es im allgemeinen nicht gelingt, V durch h, g, g', m in der Form

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

auszudrücken, wenn die erzeugende Funktion auch nur vom vierten Grade ist, setzen wir:

$$y = a + cx^2 + ex^4,$$

so daß wir erhalten:

$$g = a, \quad g' = a + c + e, \quad m = a + \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{16}e,$$

also durch Elimination:

$$a = g, \quad c = -5g - \tfrac{1}{3}g' + \tfrac{16}{3}m, \quad e = 4g + \tfrac{4}{3}g' - \tfrac{16}{3}m,$$

so daß wir, da wir durch Integrieren

$$V = h[a + \tfrac{1}{3}c + \tfrac{1}{5}e]$$

erhalten, schließlich die folgende nur h, g, g', m enthaltende Formel erhalten:

$$V = h \cdot [\tfrac{2}{15}g + \tfrac{7}{45}g' + \tfrac{32}{45}m].$$

Der Weg zur Ableitung einer Formel für V, die h, g, g', m enthält, muß im allgemeinen bei jeder erzeugenden Funktion zum Ziele führen. Die Bedingung, die bestehen muß, damit in der resultierenden Formel

$$V = h \cdot [\gamma \cdot g + \gamma' \cdot g' + \mu \cdot m]$$

der Koeffizient γ' von g' gleich dem Koeffizienten γ von g wird, ist leicht zu erkennen. Die erzeugende Funktion muß nämlich von der Form:

$$a + bx + c \cdot x^n$$

sein. Denn dann erhalten wir:

$$g = a\,, \quad g' = a + b + c\,, \quad m = a + \frac{1}{2} b + c \cdot \frac{1}{2^n}\,,$$

woraus schließlich folgt:

$$\gamma = \gamma' = \frac{2^n - (n+1)}{(n+1)(2^n - 2)}\,;$$

$$\mu = \frac{2^n (n-1)}{(n+1) \cdot (2^n - 2)}\,.$$

Hiernach erhalten wir beispielsweise:

1. $$V = \frac{h}{70}(11g + 11g' + 48m)\,,$$

wenn $y = a + bx + cx^4$ ist;

2. $$V = \frac{h}{90}(13g + 13g' + 64m)\,,$$

wenn $y = a + bx + cx^5$ ist;

3. $$V = \frac{h}{434} \cdot (57g + 57g' + 320m)\,,$$

wenn $y = a + bx + cx^6$ ist.

Für $n = 2$ und $n = 3$ erhalten wir $\gamma = \gamma' = \frac{1}{6}$ und $\mu = \frac{2}{3}$ in Bestätigung des oben abgeleiteten Resultates für den Fall, daß die erzeugende Funktion eine allgemeine ganze Funktion dritten Grades ist.

Daß der Obelisk zu den Körpern gehört, für welche die Simpsonsche Formel

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

gilt, folgt aus dem V. Abschnitte des ersten Teiles dieser „Auslese", wo in Formel (4) der Inhalt eines beliebigen Parallelschnittes durch g, g', α, α' ausgedrückt ist, wo α unser x, α' gleich unserem $1 - x$ ist, so daß wir für den Obelisken erhalten:

$$y = (1 - x)^2 \cdot g + x^2 \cdot g' + 2(1 - x)x \cdot \sqrt{gg'}\,.$$

Da die erzeugende Funktion vom zweiten Grade ist, indem in $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ zu setzen ist:

$$a = g\,, \quad b = -2g + 2\sqrt{gg'}, \quad c = g + g' - 2\sqrt{gg'}, \quad d = 0\,,$$

so gehört nach dem Obigen der Obelisk zu den Körpern, für welche die Volumenformel

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$$

gilt.

Bezeichnet ferner $\varrho^2\pi$ die Grundfläche g einer Kugelschicht, $\varrho'^2\pi$ die andere Grundfläche g', ferner p den Zentralabstand der Grundfläche g, $x \cdot h$ die Höhe der Kugelschicht und r den Radius der Kugel, so erkennt man aus:

$$y = \pi[r^2 - (p + xh)^2]\,,$$

daß auch die Kugelschicht zu den Körpern gehört, für welche die Formel $V = \frac{h}{6}(g + g' + 4m)$ gilt.

§ 3. Die erzeugende Funktion ist allgemein.

In § 2 haben wir noch daran festgehalten, daß die erzeugende Funktion, welche den Inhalt jeder Parallelfläche abhängig von $x \cdot h$ darstellt, eine ganze Funktion der veränderlichen Zahl x sei. Hier soll gezeigt werden, daß die Funktion ganz beliebig sein kann, also auch transzendent, indem es ja nur darauf ankommt, drei von den in ihr vorkommenden Konstanten passende Werte zu erteilen, um zu erreichen, daß das Volumen des erzeugten Körpers sich in der Form:

$$V = h \cdot [\gamma \cdot g + \gamma' \cdot g' + \mu \cdot m]$$

ausdrücken läßt, wo h die Höhe zwischen den beiden parallelen Grundflächen, g und g' deren Inhalte sind und wo γ, γ', μ Koeffizienten sind, deren Wert sich nach der Natur des erzeugten Körpers richtet. Um zu erreichen, daß auch, wie in der Simpsonschen Formel, die Koeffizienten γ und γ' von g und g' übereinstimmen, setzen wir die erzeugende Funktion:

$$y = f(x) = a + bx + c \cdot \varphi'(x),$$

wodurch wir der Allgemeinheit keinen Abbruch tun. Dem Usus entsprechend, setzen wir $\int \varphi'(x)\, dx = \varphi(x)$ und verstehen unter $\varphi'(0)$, $\varphi'(1)$, $\varphi'(\frac{1}{2})$ die Werte, die $\varphi'(x)$ erhält, wenn man $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ setzt, sowie unter $\varphi(1)$ und $\varphi(0)$ die Werte, die $\varphi(x)$ erhält, wenn man $x = 1$ bzw. $x = 0$ setzt. Um g, g', m ein-

zuführen, setzen wir $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, wodurch wir erhalten:

$$g = a + c \cdot \varphi'(0) , \qquad g' = a + b + c \cdot \varphi'(1) ,$$
$$m = a + \tfrac{1}{2} b + c \cdot \varphi'(\tfrac{1}{2}) .$$

Für V erhalten wir:

$$V = h \cdot \int_0^1 y \, dx$$

oder:

$$\frac{V}{h} = a + \tfrac{1}{2} b + c \cdot [\varphi(1) - \varphi(0)] .$$

Es ist nun leicht, a, b, c durch g, g', m zu ersetzen. Wir erhalten:

$$g + g' - 2m = c \cdot [\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2 \cdot \varphi'(\tfrac{1}{2})]$$

und:

$$m - c \cdot \varphi'(\tfrac{1}{2}) = \frac{V}{h} - c \cdot [\varphi(1) - \varphi(0)] ,$$

oder:

$$c = \frac{g + g' - 2m}{\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2\varphi'(\frac{1}{2})}$$

und:

$$\frac{V}{h} = m + c \cdot [\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(\tfrac{1}{2})] .$$

Setzt man nun hier den für c erhaltenen Ausdruck ein, so erhält man:

$$\frac{V}{h} = \frac{\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(\frac{1}{2})}{\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2\varphi'(\frac{1}{2})} \cdot (g + g')$$
$$+ \frac{\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2\varphi(1) + 2\varphi(0)}{\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2\varphi'(\frac{1}{2})} \cdot m .$$

Setzt man $\varphi'(x)$ gleich der ganzen Funktion x^n, so erhält man $\varphi(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$, also:

$$\varphi(1) = \frac{1}{n+1}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0), \quad \varphi'(1) = 1,$$

$$\varphi'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^n}.$$

Demnach ergibt die allgemeine Formel:

$$\gamma = \gamma' = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{2}{2^n}} = \frac{2^n - (n+1)}{(n+1)(2^n - 2)},$$

$$\mu = \frac{0 + 1 - \frac{2}{n+1} + 0}{1 - \frac{2}{2^n}} = \frac{2^n \cdot (n-1)}{(n+1)(2^n - 2)}$$

in Übereinstimmung mit dem schon in § 2 erhaltenen Beispiele.

Zweitens sei $\varphi'(x)$ gleich der gebrochenen Funktion $\frac{1}{x + \frac{1}{2}}$, so daß $\varphi(x) = l(x + \frac{1}{2})$ ist. Dann kommt:

$$\varphi(1) = l\tfrac{3}{2}, \quad \varphi(0) = l\tfrac{1}{2},$$

sowie:

$$\varphi'(0) = 2, \quad \varphi'(1) = \tfrac{2}{3}, \quad \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 1,$$

so daß wir erhalten:

$$V = h \cdot [(g + g')(\tfrac{3}{2}\, l\, 3 - \tfrac{3}{2}) + m \cdot (4 - 3\, l\, 3)].$$

Drittens sei $\varphi'(x)$ gleich der transzendenten Funktion $\cos\pi(x - \frac{1}{2})$, so daß $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\sin\pi(x - \frac{1}{2})$ ist. Dann erhält man:

$$\varphi(1) = \frac{1}{\pi}, \quad \varphi(0) = -\frac{1}{\pi},$$

sowie:

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0, \quad \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 1,$$

so daß wir erhalten:

$$V = h\left[(g + g')\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) + m \cdot \frac{2}{\pi}\right].$$

Endlich folgt aus den obigen allgemeinen Resultaten für die Koeffizienten $\gamma = \gamma'$ und μ auch die Bedingung, welche die Funktion $\varphi'(x) = \frac{1}{c}[f(x) - a - b\,x]$ erfüllen muß, damit sich für das Volumen des durch diese Funktion erzeugten Körpers

$$V = \frac{h}{6}(g + g' + 4\,m)$$

ergibt. Man hat, um die gesuchte Bedingungsgleichung zu erhalten, nichts weiter zu tun als den für μ erhaltenen Ausdruck gleich dem Vierfachen des für γ erhaltenen Ausdrucks zu setzen, wodurch man erhält:

$$\varphi'(1) + \varphi'(0) + 4 \cdot \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 6 \cdot \varphi(1) - 6 \cdot \varphi(0).$$

Wenn die Funktion $\varphi'(x)$ bzw. $\varphi(x)$ diese Bedingung erfüllt, kann man sicher sein, die übliche Formel für das Volumen des Obelisken zu erhalten,

abgesehen von einigen künstlich zu konstruierenden Ausnahmefällen, z. B., daß $\varphi'(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ unstetig wird. Ferner wird man bei der Bildung der Funktion $\varphi'(x)$ daran denken, daß

$$\varphi'(0) + \varphi'(1) - 2 \cdot \varphi'(\tfrac{1}{2})$$

nicht Null wird, weil sonst der Nenner von $\gamma = \gamma'$ und μ Null würde. Setzt man z. B.

$$\varphi'(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2} x ,$$

so tritt dieser Fall ein, indem $\gamma = \gamma' = \frac{0}{0}$ und auch $\mu = \frac{0}{0}$ wird.

Schon in § 1 ist $\varphi'(x) = x^4 - \frac{2}{5} x^5$ gesetzt und dadurch ein Fall gegeben, in welchem die erzeugende Funktion fünften Grades wird, und dennoch die übliche Formel für das Volumen des Obelisken anwendbar wird. In der Tat entspricht dieser Fall der soeben aufgestellten Bedingungsgleichung, da ja:

$$\varphi'(1) = \tfrac{3}{5} , \quad \varphi'(0) = 0 , \quad \varphi'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{20} , \quad \varphi(1) = \tfrac{2}{15} ,$$
$$\varphi(0) = 0$$

wird, und

$$\tfrac{3}{5} + 0 + \tfrac{4}{20} = 6 \cdot \tfrac{2}{15} - 6 \cdot 0$$

ist.

Bisher ist das Volumen des verallgemeinerten Obelisken immer nur durch die beiden Grundflächen und die Mittelfläche ausgedrückt. Statt der Inhalte dieser drei Flächen kann man jedoch auch die Inhalte irgendwelcher dreier Parallelflächen wählen. Der Weg zur

Auffindung der Volumenformel ist dann genau derselbe, nur daß man, statt von $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ auszugehen, von irgendwelchen drei anderen Werten von x auszugehen hat. Dabei kann die Funktion $y=f(x)=a+bx+c\cdot\varphi'(x)$, welche den verallgemeinerten Obelisken erzeugt, wiederum ganz beliebig sein. Für den Obelisken ist übrigens auch schon in Abschnitt V des ersten Teiles dieser „Auslese" auf elementarem Wege gezeigt, wie man an die Stelle der Grundflächen und der Mittelfläche drei an beliebiger Stelle gelegene Parallelflächen substituieren kann, aus denen in besonderen Fällen auch zwei Parallelflächen werden können. Die folgenden Beispiele verdeutlichen dies:

1. Wenn die erzeugende Funktion $y=a+bx+cx^2$ ist, und das Volumen durch die Grundfläche g und diejenige Parallelfläche g_1 auszudrücken ist, deren Abstand von g zwei Drittel der Höhe h beträgt, so hat man:

$$V=h(a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c)$$

und a, b, c durch g und g_1 zu ersetzen, was durch die beiden Ansatzgleichungen:

$$g=a \quad \text{und} \quad g_1=a+\tfrac{2}{3}b+\tfrac{4}{9}c$$

gelingt. Denn es folgt:

$$\tfrac{2}{3}b+\tfrac{4}{9}c=g_1-g$$

und:

$$b=\tfrac{3}{2}g_1-\tfrac{3}{2}g-\tfrac{2}{3}c,$$

so daß

$$a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c=g+\tfrac{3}{4}g_1-\tfrac{3}{4}g-\tfrac{1}{3}c+\tfrac{1}{3}c$$

und:

$$V = h(\tfrac{1}{4} g + \tfrac{3}{4} g_1)$$

kommt. Da der Koeffizient von c Null wurde, so gelingt es bei Obelisken und allen Körpern, deren erzeugende Funktion zweiten Grades ist, das Volumen durch die Höhe, die eine Grundfläche und diejenige Parallelfläche auszudrücken, deren Ebene von der Ebene dieser Grundfläche den Abstand $\tfrac{2}{3} h$ hat.

2. Wenn die drei Parallelflächen die Mittelfläche und diejenigen beiden Parallelflächen sind, die von ihr den Abstand $\frac{h}{4}\sqrt{2}$ haben, so ist das Volumen gleich dem Produkt der Höhe und des arithmetischen Mittels der Inhalte der drei Flächen, falls der Körper wieder durch eine Funktion zweiten Grades erzeugt wird. Denn dann kommt:

$$V = h(a + \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{3} c)$$

und:

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= a + \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{4} b\sqrt{2} + c(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}) \\ m &= a + \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{4} c \\ g_2 &= a + \tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{4} b\sqrt{2} + c(\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}) \end{aligned}\right\},$$

woraus folgt:

$$\left\{\begin{aligned} m - g_1 &= \tfrac{1}{4} b\sqrt{2} - \tfrac{1}{8} c + \tfrac{1}{4} c\sqrt{2} \\ g_2 - m &= \tfrac{1}{4} b\sqrt{2} + \tfrac{1}{8} c + \tfrac{1}{4} c\sqrt{2} \end{aligned}\right\},$$

was ergibt:

$$c = 4 g_1 + 4 g_2 - 8 m$$

und:

$$a + \tfrac{1}{2} b = m - \tfrac{1}{4} c = 3 m - g_1 - g_2 ,$$

also:

$$\frac{V}{h} = 3m - g_1 - g_2 + \tfrac{1}{3}(4g_1 + 4g_2 - 8m)$$

oder:

$$V = h(\tfrac{1}{3}g_1 + \tfrac{1}{3}m + \tfrac{1}{3}g_2) = \frac{h}{3}(g_1 + m + g_2)\,.$$

3. Auch gelingt es, falls die erzeugende Funktion wieder zweiten Grades ist, das Volumen durch die Höhe h und die Inhalte von nur zwei Parallelflächen auszudrücken, die von der Mittelfläche gleichen Abstand haben, nämlich den Abstand $\frac{h}{6}\sqrt{3}$. Man hat dann in:

$$V = h(a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{3}c)$$

a, b, c zu bestimmen aus:

$$\left\{\begin{array}{l} g_1 = a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{6}b\sqrt{3} + c\cdot\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\right) \\ g_2 = a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{6}b\sqrt{3} + c\cdot\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\right) \end{array}\right\},$$

woraus folgt:

$$\tfrac{1}{2}(g_1 + g_2) = a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{3}c\,,$$

so daß in der Tat:

$$V = \frac{h}{2}(g_1 + g_2)$$

ist, wo g_1 und g_2 die Inhalte der beiden symmetrisch gelegenen Flächen sind, die von der Mittelfläche den Abstand $\frac{h}{6}\sqrt{3}$ haben.

4. Wenn der Körper durch die transzendente Funktion $y = a + b \cdot \cos\frac{\pi}{2} x + c x^2$ erzeugt wird und sein Volumen durch die Höhe, die beiden Grundflächen und den Inhalt g_1 derjenigen Parallelfläche auszudrücken ist, welche von der Grundfläche mit dem Inhalte g den Abstand $\frac{2}{3} h$ hat, so ist:

$$V = h\left[a + \frac{2}{\pi} b + \frac{1}{3} c\right]$$

und:

$$\left\{\begin{array}{l} g = a + b \\ g' = a + c \\ g_1 = a + \frac{1}{2} b + \frac{4}{9} c \end{array}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich a, b, c in folgender Weise durch g, g' und g_1 ausgedrückt:

$$\left\{\begin{array}{l} a = -\ \ 9g - 8g' + 18g_1 \\ b = +10g + 8g' - 18g_1 \\ c = \quad\ \ 9g + 9g' - 18g_1 \end{array}\right\},$$

so daß kommt:

$$\left\{\begin{array}{r} a + \frac{1}{3} c = -6g - 5g' + 12g_1 \\ \frac{2}{\pi} b = \frac{20}{\pi} g + \frac{16}{\pi} g' - \frac{36}{\pi} g_1 \end{array}\right\},$$

oder:

$$V = h\left[\left(\frac{20}{\pi} - 6\right) g + \left(\frac{16}{\pi} - 5\right) g' + \left(12 - \frac{36}{\pi}\right) g_1\right].$$

Die Betrachtungen, welche oben zu der Ausdehnung der Formel für das Volumen eines Obelisken auf beliebige Raumteile, die zwischen zwei parallelen Ebenen liegen, geführt haben, lassen sich genau so auch für zwei ebene Flächenstücke anstellen, die zwischen zwei parallelen Strahlen liegen. Auch wird dem an n-dimensionale Verallgemeinerungen gewöhnten Mathematiker nicht entgangen sein, daß jede n-dimensionale Verallgemeinerung eines Körpers sich ebenso behandeln läßt, falls das so entstehende Polytop[1]) zwischen zwei parallelen $(n-1)$-dimensionalen linearen Räumen liegt.

[1]) Vgl. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, Zweiter Teil, „Die Polytope", Sammlung Schubert, Bd. 36, Leipzig 1905.

VI. Abschnitt.

Das Formelsystem der sphärischen Trigonometrie.

§ 1. Die Grundformeln.

Die sphärische Trigonometrie ist didaktisch von hohem Werte, nicht allein wegen ihrer Anwendungen auf Nautik und mathematische Geographie, sondern auch, weil sie neues Licht auf die ebene Trigonometrie wirft und weil deren goniometrische Formeln in schönster Weise zur Geltung kommen. Deshalb ist es ratsam, die nicht zu umgehenden stereometrischen Grundlagen auf ein Minimum zu beschränken und dann den Aufbau der Formeln möglichst rechnerisch zu gestalten. Diesem Gedanken Rechnung tragend, habe ich im folgenden nur zwei auf das rechtwinklige Dreieck bezügliche Formeln stereometrisch abgeleitet, um mit ihrer Hilfe den Radius jedes der vier Berührungskreise und jedes der vier Umkreise auf dreifache Weise auszudrücken. Die so gewonnenen Formeln reichen vollkommen aus, um den ganzen Formelbau der sphärischen Trigonometrie leicht und übersichtlich aufzuführen.

Um die beiden der Stereometrie zu entnehmenden Grundformeln abzuleiten, denke man sich in der

Ebene des Papieres das bei B rechtwinklige Dreieck OAB und auf dieser Ebene das Lot AC. O ist dann der Scheitel einer dreikantigen Ecke, deren drei Kanten OA, OB, OC sind. Bezeichnet man die Winkel AOB, BOC, COA beziehungsweise mit c, a, b und die Winkel der Ebenenpaare, die sich in OA, OB, OC schneiden, mit α, β, γ, so ergibt sich, da α ein rechter Winkel sein soll,

$$\operatorname{tg} b = \frac{CA}{OA} \quad \text{und} \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{BA}{CA},$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{cotg} \beta = \frac{BA}{OA} = \sin c. \tag{1}$$

Ferner ergibt sich aus:

$$\operatorname{cotg} a = \frac{OB}{BC} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} c = \frac{AB}{OB}$$

durch Multiplikation:

$$\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tg} c = \frac{AB}{BC} = \cos \beta. \tag{2}$$

Man beachte nun, daß, ebenso wie das ebene Dreieck, auch das sphärische Dreieck vier Kreise besitzt, von denen jeder entweder die drei Seiten selbst oder eine Seite selbst und zwei Verlängerungen berührt, und daß die auf den Seiten bestimmten Abstände der Berührungspunkte von den Ecken entweder s oder $s - a$, $s - b$, $s - c$ sind, wo s den halben Umfang $\frac{1}{2}(a + b + c)$ bedeutet. Hiernach erhält man nach Formel (1):

$$\sin(s - a) = \operatorname{tg} \varrho \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varrho = \sin(s - a) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Genau so erhält man:

$$\operatorname{tg}\varrho = \sin(s - b) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varrho = \sin(s - c) \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

So wie soeben für den Radius ϱ des Inkreises drei Formeln entstanden, so auch für jeden der Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der drei Ankreise, wobei nur zu beachten ist, daß beispielsweise ϱ_a mit $\frac{\alpha}{2}$, mit $\frac{180 - \beta}{2}$ und mit $\frac{180 - \gamma}{2}$ in Beziehung tritt. Hiernach entsteht also das folgende Gleichungssystem:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}\varrho &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(s - a) = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \sin(s - b) \\ &= \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \sin(s - c) \\ \operatorname{tg}\varrho_a &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin s = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \sin(s - c) \\ &= \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \cdot \sin(s - b) \\ \operatorname{tg}\varrho_b &= \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(s - c) = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \sin s \\ &= \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \cdot \sin(s - a) \\ \operatorname{tg}\varrho_c &= \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(s - b) = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \sin(s - a) \\ &= \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \sin s \end{aligned} \right\}.$$

Verlängert man alle Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC bis zum zweiten Schnittpunkte A', B', C', so erscheint der Kreis mit dem Radius ϱ_a als Inkreis des Dreiecks $A'BC$, der mit dem Radius ϱ_b als Inkreis des Dreiecks $AB'C$ und der mit dem Radius ϱ_c als Inkreis des Dreiecks ABC'. Demnach wird man dem Umkreise um ABC mit dem Radius r die drei Umkreise um $A'BC$, um $AB'C$, um ABC' mit den Radien r_a, r_b, r_c hinzugesellen. Für die vier Radien r, r_a, r_b, r_c gilt ein dem (3) ähnliches Gleichungssystem, das mit Hilfe der oben abgeleiteten Formel (2) abzuleiten ist. Dabei beachte man, daß an die Stelle der halben Seitensumme s die halbe Winkelsumme tritt, die wir mit σ bezeichnen. Überhaupt tritt $\operatorname{cotg} r$, $\operatorname{cotg} r_a$, $\operatorname{cotg} r_b$, $\operatorname{cotg} r_c$ für $\operatorname{tg} \varrho$, $\operatorname{tg} \varrho_a$, $\operatorname{tg} \varrho_b$, $\operatorname{tg} \varrho_c$ ein, ferner $\operatorname{cotg} \frac{a}{2}$ für $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, also $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ für $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ usw., endlich $\cos(\sigma - \alpha)$ für $\sin(s - a)$, $\cos(\sigma - \beta)$ für $\sin(s - b)$, $\cos(\sigma - \gamma)$ für $\sin(s - c)$. Besonders beachte man, daß „minus $\cos \sigma$“ an die Stelle von $\sin s$ tritt, was damit zusammenhängt, daß die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks größer als 180 Grad ist. So entspricht also dem Formelsystem (3) das folgende Formelsystem:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{cotg} r &= \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cdot\cos(\sigma-\alpha) = \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\cdot\cos(\sigma-\beta) \\
&= \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\cdot\cos(\sigma-\gamma) \\
\operatorname{cotg} r_a &= \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cdot(-\cos\sigma) = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\cos(\sigma-\gamma) \\
&= \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\cos(\sigma-\beta) \\
\operatorname{cotg} r_b &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\cos(\sigma-\gamma) = \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\cdot(-\cos\sigma) \\
&= \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\cos(\sigma-\alpha) \\
\operatorname{cotg} r_c &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\cos(\sigma-\beta) = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\cos(\sigma-\alpha) \\
&= \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\cdot(-\cos\sigma)
\end{aligned}
\right\}.
$$

Auch sind die Formeln (4) den Formeln (3) polar, d. h. sie gehen aus ihnen hervor, wenn man jede Seite durch das Supplement des gegenüberliegenden Winkels und jeden Winkel durch das Supplement der gegenüberliegenden Seite ersetzt. Dabei hat man den doppelten Radius jedes Inkreises durch das Supplement des doppelten Radius des entsprechenden Umkreises zu ersetzen.

§ 2. Die auf die Seiten und Winkel bezüglichen Formeln.

Am einfachsten ergeben sich aus den Formelsystemen (3) und (4) die Formeln, welche die Tangens

der halben Winkel durch die Seiten ausdrücken bzw. die ihnen polaren Formeln. Multipliziert man nämlich bei (3) die gleich $\mathrm{tg}\,\varrho$ bzw. $\mathrm{tg}\,\varrho_a$ gesetzten ersten Ausdrücke, andererseits auch die zweiten Ausdrücke, so erhält man:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin s\cdot\sin(s-a)=\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)$$

oder:

$$(1)\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}\,.$$

Hieran schließen sich die analogen Formeln für $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ und $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Die polaren Formeln, welche die halben Seiten durch die Winkel ausdrücken, folgen ebenso aus (4) in § 1.

Zweitens folgen dann aus den Grundformeln (3) und (4) in § 1 die Napierschen Analogien. Aus den beiden ersten Ausdrücken, die in (3) $\mathrm{tg}\,\varrho$ gleichgesetzt sind, folgt nämlich:

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin(s-b)}{\sin(s-a)}\,.$$

Ferner folgt aus den in (3) $\mathrm{tg}\,\varrho_a$ gleichgesetzten beiden ersten Ausdrücken:

$$(3)\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}\,.$$

Aus (2) in § 2 folgt dann durch bekannte Proportionsumwandlung:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin(s-b) - \sin(s-a)}$$

oder:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a-b}{2}}$$

oder:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{a-b}{2},$$

woraus folgt:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Analog folgt aus (3):

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin s - \sin(s-c)}$$

oder:

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

oder:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{c}{2},$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \tag{5}$$

Die Formeln (4) und (5) sind aber zwei von den vier Formeln, die unter dem Namen Napiersche Analogien bekannt sind. Die beiden übrigen folgen ebenso aus (4) in § 1.

Dividiert man nun (5) durch (4), so erhält man die Tangensformel der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{6}$$

Wendet man nun wieder die Proportionsumwandlung auf (6) an, so erhält man die Sinusformel der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}+\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}-\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder:

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder:

$$\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

oder:

$$\frac{\sin a}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,. \tag{7}$$

Die sogenannte unlogarithmische Kosinusformel, welche den Kosinus eines ganzen Winkels durch die Seiten ausdrückt, kann man dann aus der oben zuerst abgeleiteten Formel für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ gewinnen, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{\sin s\cdot\sin(s-a)-\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)+\sin(s-b)\sin(s-c)}\,.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Nun ist:

$$\sin s \cdot \sin(s - a) = \sin\left(\frac{b + c}{2} + \frac{a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{b + c}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \sin^2 \frac{b + c}{2} \cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \frac{b + c}{2} \sin^2 \frac{a}{2}$$

und:

$$\sin(s - b) \cdot \sin(s - c)$$

$$= \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{b - c}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{b - c}{2}\right)$$

$$= \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b - c}{2} - \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b - c}{2}.$$

Ersetzt man nun $\sin^2 \frac{b + c}{2}$ durch $1 - \cos^2 \frac{b + c}{2}$ und $\cos^2 \frac{b - c}{2}$ durch $1 - \sin^2 \frac{b - c}{2}$, so kommt:

$$\sin s \cdot \sin(s - a) - \sin(s - b) \cdot \sin(s - c)$$

$$= \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \frac{b + c}{2} + \sin^2 \frac{b - c}{2},$$

indem $\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$ durch 1 ersetzt werden konnte.

Ebenso erhält man:

$$\sin s \cdot \sin(s - a) + \sin(s - b) \cdot \sin(s - c)$$

$$= \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \frac{b + c}{2} - \sin^2 \frac{b - c}{2}.$$

Dadurch kommt aus (8):

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b+c}{2} + \sin^2\frac{b-c}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{b+c}{2} - \sin^2\frac{b-c}{2}}$$

$$= \frac{\cos a - \frac{1}{2}[1+\cos(b+c)] + \frac{1}{2}[1-\cos(b-c)]}{1 - \frac{1}{2}[1+\cos(b+c)] - \frac{1}{2}[1-\cos(b-c)]}$$

$$= \frac{\cos a - \frac{1}{2}[\cos(b+c) + \cos(b-c)]}{1 - 1 - \frac{1}{2}[\cos(b+c) - \cos(b-c)]}$$

$$= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Die hierzu polare Kosinusformel erhält man ebenso aus der Formel, welche $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ durch die drei Winkel ausdrückt.

§ 3. Die 16 Relationen zwischen $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Aus den grundlegenden Formeln (3) des § 1 folgen auch die 16 interessanten Beziehungen, die zwischen $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ bestehen. Aus den in 3. genannten, von den Berührungsradien unabhängigen zweimal vier Gleichungen ergibt sich nämlich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin s}$$

und außerdem zwei Gleichungen, die aus ihr durch zyklische Vertauschung hervorgehen. Deshalb erhalten wir durch Addition:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin(s-c)+\sin(s-a)}{\sin s}$$

$$=\frac{2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a-c}{2}}{\sin s}.$$

Andererseits erhalten wir durch Subtraktion:

$$-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1=\frac{\sin(s-b)-\sin s}{\sin s}=\frac{2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a+c}{2}}{\sin s}$$

Aus den beiden so entstandenen Relationen folgt dann durch Subtraktion:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1$$

$$=\frac{2\sin\frac{b}{2}}{\sin s}\left(\cos\frac{a-c}{2}-\cos\frac{a+c}{2}\right)=\frac{4\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin s}$$

Wir haben also die Relation gewonnen:

$$\text{(I)}\quad\left\{\begin{aligned}&-1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\\&\qquad=\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin s}.\end{aligned}\right.$$

Indem wir in derselben Weise aus 3. in § 1 vier Relationen ableiten, die rechts den Nenner $\sin(s-a)$ haben, erhalten wir durch analoge Zusammenfassung:

$$\text{(II)}\left\{\begin{aligned}&-\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\\&\qquad=\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin(s-a)}.\end{aligned}\right.$$

Analog ergibt sich:

$$\text{(III)}\left\{\begin{aligned}&-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\\&\qquad=\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin(s-b)}.\end{aligned}\right.$$

und:

$$\text{(IV)}\left\{\begin{aligned}&-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+1\\&\qquad=\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin(s-c)}.\end{aligned}\right.$$

Nun lassen sich aber die rechts erschienenen Quotienten leicht durch $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ ausdrücken, indem man $\sin s$, $\sin(s-a)$, $\sin(s-b)$, $\sin(s-c)$ nach den Formeln für die Summe dreier Winkel entwickelt, also beispielsweise:

$$\sin s = \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$+\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

setzt. Dadurch kommt:

$$\frac{\sin s}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2} + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{a}{2}$$

$$+ \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2} - 1\,.$$

So erhalten wir aus (I):

$$-1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$= \frac{4}{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2} + \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{a}{2} + \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2} - 1}$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}\,.$$

Die abgeleitete Relation zwischen den sechs Tangens der drei halben Seiten und der drei halben Winkel ist die erste von sechzehn verwandten Relationen. Wenn wir die soeben abgeleitete Relation mit (I) 1 bezeichnen, haben wir die ebenso aus (II) entstehende (II) 1 zu nennen usw. Diese vier Relationen haben dieselbe arabische Nummer 1, weil sie

alle aus $4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}$ hervorgehen. Wenn wir nun aber beachten, daß:

$$(1)\begin{cases} -\sin s + \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) \\ \qquad = 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} +\sin s - \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c) \\ \qquad = 4 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} +\sin s + \sin(s-a) - \sin(s-b) + \sin(s-c) \\ \qquad = 4 \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \cos\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} +\sin s + \sin(s-a) + \sin(s-b) - \sin(s-c) \\ \qquad = 4 \sin\frac{c}{2} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \end{cases}$$

ist, so erkennen wir, daß es viermal vier verwandte Relationen zwischen $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ geben muß. Wenn wir jeden der auftretenden Kotangens immer durch den reziproken Wert von Tangens ersetzen, und, der Kürze und der besseren Übersicht wegen, immer a, b, c, α, β, γ für beziehungsweise $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ schreiben, so können wir den 16 Relationen die folgende Gestalt geben:

$$(\mathrm{I})\,1.\ (-abc+a+b+c)(-1+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4abc$$ [1]

$$(\mathrm{II})\,1.\ (+abc-a+b+c)(-1+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4abc\beta\gamma$$

$$(\mathrm{III})\,1.\ (+abc+a-b+c)(-1+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4abc\gamma\alpha$$

$$(\mathrm{IV})\,1.\ (+abc+a+b-c)(-1+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4abc\alpha\beta$$

$$(\mathrm{I})\,2.\ (-abc+a+b+c)(+1-\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4a$$

$$(\mathrm{II})\,2.\ (+abc-a+b+c)(+1-\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4a\beta\gamma$$

$$(\mathrm{III})\,2.\ (+abc+a-b+c)(+1-\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4a\gamma\alpha$$

$$(\mathrm{IV})\,2.\ (+abc+a+b-c)(+1-\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=4a\alpha\beta$$

$$(\mathrm{I})\,3.\ (-abc+a+b+c)(+1+\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha\beta)=4b$$

$$(\mathrm{II})\,3.\ (+abc-a+b+c)(+1+\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha\beta)=4b\beta\gamma$$

$$(\mathrm{III})\,3.\ (+abc+a-b+c)(+1+\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha\beta)=4b\gamma\alpha$$

$$(\mathrm{IV})\,3.\ (+abc+a+b-c)(+1+\beta\gamma-\gamma\alpha+\alpha\beta)=4b\alpha\beta$$

$$(\mathrm{I})\,4.\ (-abc+a+b+c)(+1+\beta\gamma+\gamma\alpha-\alpha\beta)=4c$$

$$(\mathrm{II})\,4.\ (+abc-a+b+c)(+1+\beta\gamma+\beta\alpha-\alpha\beta)=4c\beta\gamma$$

$$(\mathrm{III})\,4.\ (+abc+a-b+c)(+1+\beta\gamma+\beta\alpha-\alpha\beta)=4c\gamma\alpha$$

$$(\mathrm{IV})\,4.\ (+abc+a+b-c)(+1+\beta\gamma+\beta\alpha-\alpha\beta)=4c\alpha\beta$$

Man beachte, daß durch polare Umformung a in $\frac{1}{\alpha}$, b in $\frac{1}{\beta}$, c in $\frac{1}{\gamma}$, α in $\frac{1}{a}$, β in $\frac{1}{b}$, γ in $\frac{1}{c}$ übergeht, und daß deshalb aus jeder der vorstehenden

[1] Diese Relation verbindet neuerdings Herr Güntsche-Berlin im Archiv d. Math. u. Phys. (III. Reihe, Bd. 7, S. 179) mit der Anfrage, ob sie bekannt sei.

Relationen durch polare Umformung diejenige hervorgeht, deren Nummer entsteht, wenn man die römische Zahl in die arabische und umgekehrt verwandelt, z. B. entsteht (II) 4. aus (IV) 2. durch polare Umwandlung. (I) 1., (II) 2., (III) 3., (IV) 4. sind sich selbst polar.

Natürlich hängen diese Relationen in vielfacher Weise voneinander ab, indem ja zwischen den drei Seiten und einem Winkel oder zwischen den drei Winkeln und einer Seite auch eine einzige Relation bestehen muß. Um z. B. die Formel abzuleiten, welche $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ ausdrückt, hat man nur das Produkt zweier von den mit (III) und (IV) bezeichneten Formeln durch das Produkt der beiden voranstehenden mit (I) und (II) bezeichneten Formeln zu dividieren. Dadurch erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(abc + a - b + c)(abc + a + b - c)}{(-abc + a + b + c)(+abc - a + b + c)}}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\left(+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)\left(+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)}{\left(-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)\left(+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)}}$$

Man beachte, daß derjenige, dem es gelingt, durch Einsetzen von rationalen Werten für $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ den hier unter der Quadratwurzel stehenden Ausdruck

als Quadrat einer rationalen Zahl darzustellen, das Problem löst, sphärische Dreiecke zu finden, in denen außer den Seiten auch ein Winkel einen rationalen Sinus und Kosinus hat, ein Problem, das für die Probleme der Ganzzahligkeit in der Stereometrie grundlegend ist (vgl. hier in meiner „Auslese", Bd. II, Abschnitt I). Wir begnügen uns jedoch hier damit, aus unserem für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ abgeleiteten Ausdruck die Beziehung zwischen $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ abzuleiten, die bestehen muß, wenn $\alpha = 90^0$, also $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$ ist. Man erhält:

$$1 = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)}{\left(-\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg}\frac{a}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)}$$

oder:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} - 1\right)^2$$
$$= \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + 1\right)^2 - \left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)^2,$$

eine Relation, die man benutzen kann, um rechtwinklige sphärische Dreiecke abzuleiten, in denen alle Seiten und alle Winkel einen rationalen Sinus und Kosinus haben. Durch weitere goniometrische Umformung folgt aus dieser Relation die einfachere Beziehung

$$\cos a = \cos b \cos c$$

zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

§ 4. Die Relationen zwischen den vier Berührungsradien und den vier Umkreisradien.

Aus den grundlegenden Formeln (3) des § 1 resultieren auch viermal drei Beziehungen, welche immer zwei Winkel und zwei Berührungsradien miteinander verbinden; nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho_a}{\operatorname{cotg}\varrho} \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho_b}{\operatorname{cotg}\varrho} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho_c}{\operatorname{cotg}\varrho} \end{aligned}\right\}, \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho}{\operatorname{cotg}\varrho_a} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho_b}{\operatorname{cotg}\varrho_a} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\operatorname{cotg}\varrho_c}{\operatorname{cotg}\varrho_a} \end{aligned}\right\}$$

usw.

Ebenso folgen aus den grundlegenden Formeln (4) des § 1 viermal drei Beziehungen, welche immer zwei Seiten und zwei Umkreisradien miteinander verbinden; nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{c}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r_a}{\operatorname{tg}r} \\ \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{a}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r_b}{\operatorname{tg}r} \\ \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{b}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r_c}{\operatorname{tg}r} \end{aligned}\right\}, \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r}{\operatorname{tg}r_a} \\ \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r_b}{\operatorname{tg}r_a} \\ \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \frac{\operatorname{tg}r_c}{\operatorname{tg}r_a} \end{aligned}\right\}$$

usw.

Führt man diese 24 Beziehungen in die 16 Formeln ein, welche, in § 3 aufgestellt, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ miteinander verbinden, so ergeben sich 16 Relationen, die allein die vier Berührungsradien und die vier Umkreisradien miteinander verbinden, indem jede Relation aus § 3 eine Relation zwischen den acht Radien ergibt. Indem wir demgemäß den 16 neuen Relationen die in § 3 eingeführte Nummernbezeichnung geben, erhalten wir:

1 (I) $$-\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{cotg} \varrho}{-\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

1 (II) $$+\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{cotg} \varrho_a}{-\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

1 (III) $$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a - \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{cotg} \varrho_b}{-\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

1 (IV) $$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b - \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{cotg} \varrho_c}{-\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

2 (I) $$-\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{cotg} \varrho}{+\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

2 (II) $$+\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{cotg} \varrho_a}{+\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

2 (III)
$$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a - \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{cotg} \varrho_b}{+\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

2 (IV)
$$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b - \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{cotg} \varrho_c}{+\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

3 (I)
$$-\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_b \cdot \operatorname{cotg} \varrho}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a - \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

3 (II)
$$+\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_b = \frac{4 \operatorname{tg} r_b \cdot \operatorname{cotg} \varrho_a}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a - \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

3 (III)
$$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a - \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_b \cdot \operatorname{cotg} \varrho_b}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a - \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

3 (IV)
$$+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b - \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_b \cdot \operatorname{cotg} \varrho_c}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a - \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

4 (I)
$$-\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_c \cdot \operatorname{cotg} \varrho}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b - \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

4 (II)
$$+\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_c \cdot \operatorname{cotg} \varrho_a}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b - \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

$$4\,(\text{III})\quad +\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a - \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_c \cdot \operatorname{cotg} \varrho_b}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b - \operatorname{cotg} \varrho_c},$$

$$4\,(\text{IV})\quad +\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b - \operatorname{tg} r_c = \frac{4 \operatorname{tg} r_c \cdot \operatorname{cotg} \varrho_c}{+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b - \operatorname{cotg} \varrho_c}.$$

Diese 16 Relationen lassen sich auch so schreiben, daß acht Ausdrücke einander gleichgesetzt werden, von denen jeder fünf Radien enthält, und zwar so, daß von den 28 daraus zu bildenden Gleichungen sechs vier Berührungsradien und zwei Umkreisradien und andere sechs umgekehrt vier Umkreisradien und zwei Berührungsradien enthalten. Dieses Gleichungssystem lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cotg} r\,(-\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c)\\
&= \operatorname{cotg} r_a\,(+\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c)\\
&= \operatorname{cotg} r_b\,(+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a - \operatorname{cotg} \varrho_b + \operatorname{cotg} \varrho_c)\\
&= \operatorname{cotg} r_c\,(+\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho_a + \operatorname{cotg} \varrho_b - \operatorname{cotg} \varrho_c)\\
&= \frac{4 \operatorname{cotg} \varrho}{-\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c}\\
&= \frac{4 \operatorname{cotg} \varrho_a}{+\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c}\\
&= \frac{4 \operatorname{cotg} \varrho_b}{+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a - \operatorname{tg} r_b + \operatorname{tg} r_c}\\
&= \frac{4 \operatorname{cotg} \varrho_c}{+\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} r_a + \operatorname{tg} r_b - \operatorname{tg} r_c}.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist das sphärische Analogon zu der bekannten Relation, welche in der Planimetrie ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c und r miteinander verbindet und welche lautet:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r.$$

Sucht man das Analogon zu der Relation, welche ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c miteinander verbindet, also zu

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho},$$

so hat man zu beachten, daß $s = (s-a) + (s-b) + (s-c)$ ist, hiernach $\sin s$ durch $\sin(s-a)$, $\sin(s-b)$, $\sin(s-c)$ auszudrücken und schließlich

$$\sin s = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varrho_a \cdot \operatorname{tg}\varrho_b \cdot \operatorname{tg}\varrho_c}{\operatorname{tg}\varrho}},$$

$$\sin(s-a) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varrho \cdot \operatorname{tg}\varrho_b \cdot \operatorname{tg}\varrho_c}{\operatorname{tg}\varrho_a}},$$

$$\sin(s-b) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varrho \cdot \operatorname{tg}\varrho_a \cdot \operatorname{tg}\varrho_c}{\operatorname{tg}\varrho_b}},$$

$$\sin(s-c) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varrho \cdot \operatorname{tg}\varrho_a \cdot \operatorname{tg}\varrho_b}{\operatorname{tg}\varrho_c}}$$

zu setzen. Wir ersparen uns die Aufstellung des etwas verwickelten Resultates.

VII. Abschnitt.

Herstellung heronischer sphärischer Dreiecke.

§ 1. Einleitendes.

Im ersten Abschnitte des zweiten Bandes dieser „Auslese“ wurde die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie behandelt. Dabei wurde erkannt, daß es nur darauf ankam, das Gegebene und das Gesuchte in rationaler Form darzustellen, um durch Multiplikation mit dem Generalnenner zu erreichen, daß bei einem Problem der algebraischen Planimetrie der Lehrer dem Schüler das Gegebene in ganzen Zahlen diktieren kann, und der Schüler dann auch für das Gesuchte ganze Zahlen erhalten muß. Ferner wurde dabei erkannt, daß die Erreichung des Zieles, Gegebenes und Gesuchtes in rationaler Form darzustellen, im wesentlichen davon abhing, daß die vorkommenden Winkel heronische waren, d. h. so beschaffen, daß ihre Sinusse und ihre Kosinusse zugleich rational waren. Ferner wurde dort erkannt, daß ein Winkel die wichtige Eigenschaft, heronisch

zu sein, immer hat, wenn der Tangens seiner Hälfte rational ist, und daß auch umgekehrt $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ rational sein muß, falls $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ beide rational sind. Dies beruht auf den aus den Grundlagen der Goniometrie leicht beweisbaren folgenden Formeln:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Es liegt nahe, die Betrachtungen, welche in dem zitierten Abschnitte (Abschnitt I von Band II dieser Auslese) zu heronischen Polygonen führten, d. h. zu solchen, bei denen die Seiten und der Inhalt rational sind, auch auf den Raum auszudehnen, und dadurch zu erreichen, daß auch in der Stereometrie der Lehrer dem Schüler für das Gegebene ganze Zahlen diktieren kann, und der Schüler dann auch für das Gesuchte ganze Zahlen erhalten muß. So wie in der Planimetrie die Polygone sich aus Dreiecken zusammensetzen und es daher für die Zwecke der Ganzzahligkeit in der Planimetrie darauf ankommt, Dreiecke mit

heronischen Winkeln herzustellen, um aus ihnen Polygone mit heronischen Winkeln zusammenzusetzen, so muß es in der Stereometrie zunächst darauf ankommen, Tetraeder mit heronischen Winkeln herzustellen. Freilich ist dadurch das Problem, Tetraeder mit sechs rationalen Kanten und vier Begrenzungsdreiecken, deren Inhalt rational ist, durchaus nicht gelöst. Denn die Konstantenzahl des Tetraeders ist sechs, so daß also die Gestalt eines Tetraeders, und auf diese kommt es ja nur an, von nur fünf voneinander unabhängigen Winkeln abhängt, während die vier Begrenzungsdreiecke, ihrer Gestalt nach, von viermal zwei Winkeln abhängen. Es dürfen also von diesen acht Winkeln nur fünf als voneinander unabhängig angesehen werden. Man erkennt ja auch leicht, daß die Gestalt eines Tetraeders völlig bestimmt erscheint, sobald bei einer Ecke die drei Winkel zwischen zwei Kanten und bei einer zweiten Ecke zwei solche Winkel als gegeben betrachtet werden. Denn die erste Ecke ist dann völlig bestimmt, weil zur Bestimmung einer dreikantigen Ecke drei Winkel gehören, so daß also auch die drei Neigungswinkel je zweier Ebenen bei dieser ersten Ecke bestimmt sind, einer dieser Neigungswinkel ist aber zugleich Neigungswinkel zweier Ebenen bei der zweiten Ecke, so daß also auch diese zweite Ecke völlig bestimmt ist. Daß dann aber auch das ganze Tetraeder, seiner Gestalt nach, bestimmt ist, folgt daraus, daß außer der ersten

Ecke auch die ihr gegenüberliegende Ebene völlig bestimmt ist. Man hat ja nur auf einer Kante der ersten Ecke einen Punkt anzunehmen, in diesem Punkte innerhalb der beiden Ebenen, in denen diese Kante liegt, an die Kante die beiden Winkel anzutragen, die für die zweite Ecke gegeben sind. Dann ist ja die Ebene, die die beiden angetragenen Schenkel verbindet, die der ersten Ecke gegenüberliegende Ebene, so daß die Gestalt des Tetraeders durch die fünf Winkel völlig bestimmt ist. Hiernach könnte man daran denken, statt von den Winkeln zwischen zwei Kanten, von den Winkeln zwischen zwei Ebenen auszugehen, d. h. von den Neigungswinkeln der beiden Ebenen, die sich in jeder Kante schneiden. Solcher Neigungswinkel gibt es aber sechs, weil ein Tetraeder sechs Kanten hat. Folglich muß, da die Gestalt des Tetraeders schon durch fünf Winkel bestimmt ist, eine Relation zwischen den sechs Neigungswinkeln des Tetraeders bestehen. Wenn diese Relation durch die sechs Neigungswinkel erfüllt wird, so daß nur fünf als voneinander unabhängig gegeben sind, und der sechste durch die Relation bestimmt ist, so sind für jede der vier Ecken des Tetraeders die drei Neigungswinkel bekannt und in jeder Ecke jeder Winkel zwischen zwei Kanten bestimmbar, und zwar durch die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie. Gelingt es nun, die Relationen zwischen den sechs Neigungswinkeln durch heronische

Winkel zu erfüllen, und gelingt es ferner bei einer dreikantigen Ecke, aus den drei Neigungswinkeln, die als heronische gegeben sind, auch die drei Winkel zwischen zwei Kanten als heronische zu bestimmen, so würde damit das Problem, Tetraeder mit sechs rationalen Kanten und vier Begrenzungsflächen, die einen rationalen Inhalt haben, herzustellen, gelöst sein. Wenn dann weiterhin auch das Verlangen gestellt wird, daß das Volumen rational werde, so müßte auch eins und deshalb jedes der vier Lote rational sein, das man von einer Ecke auf die gegenüberliegende Fläche fällen könnte. Hiernach ist wohl klar, daß aus dem Probleme, heronische sphärische Dreiecke herzustellen, das Problem, heronische Tetraeder herzustellen, nicht ohne weiteres hervorgeht, sondern daß das erste Problem, mit dem wir uns in diesem Abschnitte beschäftigen, das zweite vorbereitet, aber durchaus nicht löst.

Auch in dem einfachen Falle, wo eine der Kanten des Tetraeders auf einer Fläche senkrecht steht, ist das Problem, ein solches Tetraeder herzustellen, durchaus nicht dadurch gelöst, daß man heronische sphärische Dreiecke herstellen kann. Denn, wenn SF diese Kante ist, so dürfen wir das Tetraeder als eine Pyramide auffassen, deren Spitze S ist und deren gegenüberliegende Grenzfläche ein Dreieck FAB ist. Was die Ecken dieser Pyramide anbetrifft, so erkennen wir, daß die beiden Ecken, deren Scheitel

A und B sind, rechtwinklig sind, weil die Ebene SAF senkrecht auf der Ebene FAB steht und weil ebenso die Ebene SBF senkrecht auf der Ebene SAB ist. Wenn nun diese Pyramide $SFAB$ rationale Kanten, rationale Grenzinhalte und rationales Volumen haben soll, so muß auch das Verhältnis des Inhaltes des Dreiecks FAB zum Inhalte des Dreiecks SAB ein rationales sein. Da aber dieses Verhältnis gleich dem Kosinus des Winkels, unter dem sich die Ebenen FAB und SAB schneiden, so erkennen wir, daß auch ein Winkel jeder der beiden Ecken mit den Scheiteln A und B erstens beiden Ecken gemeinsam und zweitens ein heronischer sein muß. Es kommt also, wie wir sehen, nicht allein darauf an, dreikantige Ecken herzustellen, in denen sowohl die drei Winkel zwischen zwei Kanten als auch die Winkel zwischen zwei Ebenen heronisch sind, sondern auch darauf, solche Ecken paarweise so herzustellen, daß die beiden Ecken eines Paares einen gemeinsamen Neigungswinkel zweier Ebenen haben. Vorläufig verzichten wir in diesem Abschnitte auf die Herstellung solcher Paare, sondern begnügen uns mit der Herstellung heronischer Ecken überhaupt, d. h. solcher Ecken, in denen jeder Winkel zwischen zwei Kanten und auch jeder Winkel zwischen zwei Ebenen heronisch ist. Auch abgesehen von der eventuellen Anwendung in der Stereometrie dürfte dieses Problem an sich schon Interesse erregen, weil es das sphärische Analogon zur Herstellung

ebener Dreiecke mit heronischen Winkeln bildet. Da die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel zwischen zwei Kanten und die drei Winkel zwischen zwei Ebenen bei der zugehörigen dreikantigen Ecke messen, deren Scheitel im Kugelzentrum liegt, so werden wir im folgenden nur von sphärischen Dreiecken, nicht aber von dreikantigen Ecken reden.

Allgemeiner kann man als ideales Ziel die Herstellung heronischer sphärischer Polygone anstreben, d. h. solcher n-kantigen Ecken, bei denen alle n Seiten und alle n Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ebenen heronisch sind, eine Aufgabe, die nach Abschnitt I in Band II dieser „Auslese" mit der Aufgabe identisch ist, dafür zu sorgen, daß die trigonometrischen Tangenten der Hälften der genannten $2n$ Winkel rational sind (vgl. oben). Die Lösung dieser Aufgabe würde dann dem Ziele näher kommen, Paare solcher heronischer sphärischer Polygone herzustellen, so daß die beiden Polygone eines solchen Paares einen gemeinsamen heronischen Winkel haben, nämlich denjenigen Winkel, der in der einen oder in der anderen Ecke erstens von dem Bogen gebildet wird, der die beiden Ecken verbindet und zweitens von einem benachbarten Bogen in jeder der beiden Ecken. Nach Erreichung dieses Zieles würde man das weitere ideale Ziel anstreben können, Polyeder von vorgeschriebener Umgrenzung herzustellen, bei denen sowohl die $2k$ Winkel in den Polygonen als

auch die k Winkel heronisch sind, die in den k Kanten von aneinanderstoßenden Flächen gebildet werden. Dabei würde man zu beachten haben, daß die Aufgabe, solche $3k$ Winkel zu finden, von $k - 1$ Konstanten abhängt, weil es ∞^1 einander ähnliche Polyeder gibt, und weil, wie in Abschnitt VIII von Band I dieser „Auslese" erörtert ist, die Konstantenzahl eines beliebigen Polyeders gleich der Anzahl seiner Kanten ist. Hierbei sei bemerkt, daß bei jedem Polyeder von vorgeschriebener Umgrenzung eine trigonometrische Relation zwischen den k Winkeln bestehen muß, unter denen sich in jeder Kante die beiden dort zusammenstoßenden Polygonebenen schneiden, weil solcher Winkel k vorhanden sind, während die Gestalt des Polyeders nur von $k - 1$ Winkeln abhängt.

Auf dem Wege zu den soeben als ideal bezeichneten Zielen hat die mathematische Forschung bisher nur einen sehr kleinen Schritt zurückgelegt, indem Herr Güntsche-Berlin im Grunert-Jahnckeschen Archiv für Mathematik neuerdings ein Zahlentripel gibt, durch welches einem Tetraeder für jede Kante, für jede Umgrenzungsfläche und für das Volumen eine ganze Zahl zugewiesen wird.

Die folgenden Paragraphen zeigen jedoch nur die Möglichkeit, auf sehr elementarem Wege unzählig viele heronische sphärische Dreiecke herzustellen.

§ 2. Anpassung des Formelsystems an das Problem.

In Abschnitt VI dieses dritten Bandes meiner „Auslese“ ist lediglich aus den Formeln für die vier Berührungsradien und die vier Umkreisradien das Formelsystem abgeleitet, das ausreicht, um alle Fragen zu beantworten, die sich auf das sphärische Dreieck beziehen. Dabei wurden, im Hinblick auf diesen Abschnitt, die Formeln besonders hervorgehoben, welche nur die trigonometrischen Tangenten der halben Seiten und der halben Winkel enthalten, wobei besonders die 16 Formeln betont wurden, welche lediglich zwischen den sechs Zahlen:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{b}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

bestehen, die für jedes sphärische Dreieck mit den drei Seiten a, b, c und den drei Winkeln α, β, γ gültig sind. Daß die Formeln, welche lediglich vier oder mehr von den soeben genannten sechs Zahlen enthalten, für das Problem der Herstellung heronischer sphärischer Dreiecke besonders wichtig sind, kommt daher, daß, wenn eine dieser sechs Zahlen rational ist, der zugehörige Winkel heronisch sein muß, d. h. einen rationalen Sinus und einen rationalen Kosinus haben muß, wie schon im Anfang von § 1 hervorgehoben ist. Der Kürze wegen, und weil ein Mißverständnis fast ausgeschlossen ist, so werden wir für die genannten sechs Zahlen kurz

$$a, \ b, \ c, \quad \alpha, \ \beta, \ \gamma$$

sagen, so daß also z. B. c nicht bloß den Winkel c bedeutet, sondern auch die Zahl, welche gleich dem Tangens der Hälfte dieses Winkels ist. Die in Abschnitt VI bewiesene Formel, welche $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ ausdrückt, lautet in der soeben eingeführten kürzeren Schreibweise:

$$(1)\quad \alpha^2 = \frac{(abc+a+b-c)(abc+a-b+c)}{(-abc+a+b+c)(abc-a+b+c)}.$$

Aus dieser Formel, welche von den sechs Stücken des sphärischen Dreiecks a, b, c, α, β, γ vier enthält, leiten wir noch einige weitere Formeln ab, die zwar fünf von diesen Stücken enthalten, aber zur Kontrolle der in den folgenden Paragraphen vorkommenden Berechnungen vorzüglich geeignet sind. Dabei wollen wir, nach Analogie einer in der ebenen Trigonometrie üblichen Abkürzung,

$$abc+a+b+c$$

mit $2s$ bezeichnen, so daß die Faktoren des Zählers des in (1) rechts stehenden Bruches $s-c$ und $s-b$ werden, die des Nenners zu $s-abc$ und $s-a$. Wir erhalten demnach aus (1):

$$(2)\qquad \alpha^2 = \frac{(s-c)(s-b)}{(s-abc)(s-a)}.$$

Analog ist:

$$\beta^2 = \frac{(s-a)(s-c)}{(s-abc)(s-b)}.$$

Aus beiden Formeln folgt durch Division:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{(s-b)^2}{(s-a)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{s-b}{s-a}.$$

Genau so kommt:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{s-c}{s-b},$$

so daß wir eine in sich symmetrische Kontrollformel erhalten, nämlich:

(3) $$\alpha \cdot (s-a) = \beta \cdot (s-b) = \gamma \cdot (s-c),$$

die wir in den späteren Berechnungen oft zur Kontrolle benutzen werden.

Eine zweite wichtige Formel ist geeignet, die dritte Seite und den dritten Winkel zu berechnen, wenn zwei Seiten und die ihnen gegenüberliegenden Winkel schon bekannt sind, und folgt aus einer der vier Napierschen Analogien. Diese Napiersche Analogie lautet:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Um $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ einführen zu können, formen wir diese Formel mit Benutzung bekannter goniometrischer Umformungen folgendermaßen um:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

woraus, nach Division des Zählers und des Nenners des rechts stehenden Bruches durch $\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$, folgt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Hiermit ist das Ziel, lediglich die trigonometrischen Tangenten der Hälften der sechs Stücke zu verknüpfen, erreicht, und wir können, mit Benutzung der eingeführten kurzen Bezeichnung, schreiben:

$$\alpha=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1+\beta\gamma}{\beta-\gamma}. \tag{4}$$

Analog ergibt sich aus der Napierschen Analogie, die derjenigen, von der wir soeben ausgingen, dual entspricht:

$$a=\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}\cdot\frac{b-c}{1+bc}. \tag{5}$$

Da die Konstantenzahl des sphärischen Dreiecks drei ist, so sind die Formeln (3), (4), (5) sehr wichtig, wenn es darauf ankommt, eine Berechnung zu kontrollieren oder das fünfte und sechste Stück zu berechnen, nachdem vier Stücke berechnet vorliegen. Sie nützen jedoch nichts, wenn es darauf ankommt, zunächst einmal vier Stücke des allgemeinen sphärischen Dreiecks durch rationale Werte zu ver-

knüpfen. Hierzu ist die Sinusformel besonders geeignet. Um aber in

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \tag{6}$$

die vier Zahlen $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ einzuführen, haben wir zu beachten, daß

$$\sin b = \frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}} \quad \text{usw.}$$

ist, was in § 1 hervorgehoben ist, so daß, um überhaupt einmal erst die Stücke b, c, β, γ durch heronische Winkel zu verknüpfen, es notwendig erscheint, die folgende aus (6) folgende Gleichung:

$$\frac{2b \cdot 2\gamma}{(1+b^2)(1+\gamma^2)} = \frac{2c \cdot 2\beta}{(1+c^2)(1+\beta^2)} \tag{7}$$

dadurch zu befriedigen, daß für b, c, β, γ rationale Werte eingesetzt werden.

Während beim schiefwinkligen Dreieck, wie soeben gezeigt ist, es darauf ankommt, eine quadratische Gleichung, wie etwa Gleichung (7), zwischen vier Unbekannten dadurch zu erfüllen, daß die vier Unbekannten rationale Werte erhalten, kommt es beim rechtwinkligen Dreieck darauf an, dasselbe für drei Unbekannte zu erreichen. Denn das rechtwinklige sphärische Dreieck hat die Konstantenzahl zwei, und es gilt deshalb, zu-

nächst einmal drei Stücke zu finden, die heronisch sind. Es liegt nahe, als diese drei Stücke die drei Seiten zu nehmen. Wenn wir dann von vornherein die Tangenten der halben Seiten einführen wollen, werden wir am besten Formel (1) benutzen, in der $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}45^0 = 1$ zu setzen ist. So entsteht:

$$1 = \frac{[a(bc+1)+(b-c)][a(bc+1)-(b-c)]}{[(b+c)+a(1-bc)][(b+c)-a(1-bc)]},$$

woraus folgt:

$$(b+c)^2 - a^2(1-bc)^2 = a^2(bc+1)^2 - (b-c)^2,$$

oder, wenn wir a^2 durch b^2 und c^2 ausdrücken wollen,

$$2b^2 + 2c^2 = a^2(2 + 2b^2c^2)$$

oder:

$$(8) \qquad a^2 = \frac{b^2+c^2}{1+b^2c^2}.$$

Natürlich kann man diese für die Herstellung heronischer rechtwinkliger sphärischer Dreiecke fundamentale Gleichung auch aus der bekannten Formel ableiten, welche die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks miteinander verknüpft, also aus:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Aus ihr folgt, bei Einführung der Abkürzungen a, b, c für $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$:

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1-b^2}{1+b^2} \cdot \frac{1-c^2}{1+c^2}$$

oder:

$$\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \frac{1 + b^2 c^2 - b^2 - c^2}{1 + b^2 c^2 + b^2 + c^2},$$

woraus durch bekannte Proportionsumformungen folgt:

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2}{2 + 2b^2 c^2},$$

also:

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2}{1 + b^2 c^2}.$$

Wenn hiernach die drei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks als heronische gefunden sind, bekommt man die Winkel als heronische am einfachsten aus der Kontrollformel (3) dieses Paragraphen, in der $\alpha = 1$ zu setzen ist, weil $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist, so daß man erhält:

$$\text{(9)} \qquad \beta = \frac{s - a}{s - b} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{s - a}{s - c},$$

wo $s = \frac{1}{2}(a b c + a + b + c)$ vorher zu berechnen ist. Aus (9) erkennt man, daß die Winkel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks von selbst heronisch werden, sobald die Gleichung (8) durch rationale Werte von a, b, c befriedigt ist, d. h. sobald die drei Seiten heronisch sind. Für das allgemeine sphärische Dreieck folgt ebenso aus (4) und (5), daß, wenn zwei Seiten und deren Gegenwinkel als heronische bestimmt sind, die dritte Seite und der dritte Winkel von selbst heronisch werden. Die Gestalt der Formel (4) zeigt ferner, daß, wenn die drei Winkel und eine

Seite heronisch ist, auch eine zweite Seite und dadurch die dritte heronisch werden müssen. Wenn drei Seiten und ein Winkel heronisch sind, so erkennt man das Heronischwerden der beiden übrigen Winkel am besten aus Formel (3). Wenn endlich zwei Seiten, der eingeschlossene Winkel und ein zweiter Winkel heronisch sind, also etwa b, c, α, β, so folgt das Heronischwerden von γ aus Formel (4), wodurch dann nach (5) auch c heronisch wird. Hiernach kann man allgemein aussprechen:

Wenn von den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks irgend welche vier heronisch sind, so müssen auch das fünfte und sechste heronisch sein.

Hiernach ist unser Problem, heronische sphärische Dreiecke herzustellen, für das rechtwinklige Dreieck darauf zurückgeführt, die Gleichung (8) durch rationale Werte von a, b, c zu erfüllen, und für das allgemeine sphärische Dreieck darauf, die Gleichung (7) durch rationale Werte von b, c, β, γ zu erfüllen.

§ 3. Rationale Lösungen gegebener Gleichungen.

In § 2 ist unser Problem, heronische sphärische Dreiecke aufzufinden, darauf zurückgeführt, die dort (7) genannte Gleichung zu lösen, für die auch geschrieben werden kann:

$$(1) \qquad \frac{b \cdot \gamma}{(1 + b^2)(1 + \gamma^2)} = \frac{c \cdot \beta}{(1 + c^2)(1 + \beta^2)},$$

und zwar müssen die für b, γ, c, β einzusetzenden Zahlen rational sein. Welche von den vier Zahlen als rationale gegeben sind, und welche gesucht, soll hier vorläufig noch gleichgültig sein, und wir betrachten die Gleichung (1) als gelöst, wenn wir b, γ, c, β einzeln durch eine fünfte Zahl rational ausgedrückt haben, so daß man für jeden beliebigen rationalen Wert, den man der fünften Zahl erteilt, zunächst vier rationale Zahlen erhält, die sich auf ein und dasselbe sphärische Dreieck beziehen. Daß dann auch die fünfte und sechste Zahl, also hier a und α, rational werden, und demnach ein sphärisches Dreieck mit sechs heronischen Stücken gefunden ist, ist in § 2 gezeigt. Ebenso geht aus § 2 hervor, daß unzählig viele rechtwinklige Dreiecke mit lauter heronischen Stücken gefunden sind, sobald man die dort mit (7) bezeichnete Gleichung

$$a^2 = \frac{b^2 + c^2}{1 + b^2 c^2} \tag{2}$$

gelöst hat, d. h. a, b, c durch einen vierten Buchstaben rational ausgedrückt hat. Welche von den vier Buchstaben b, γ, c, β man nun auch in (1) als Unbekannte betrachtet, immer ist diese Gleichung eine quadratische. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y dürfte aber überhaupt noch nicht rational gelöst sein, d. h. es gibt noch keine allgemeine Methode, um rationale Werte zu finden, die in die Gleichung:

$$(3)\begin{cases} Ax^2y^2 + 2Bx^2y + Cx^2 + 2B'xy^2 + 2Dxy \\ \qquad + 2E\cdot x + C'y^2 + 2E'y + F = 0 \end{cases}$$

für x und y eingesetzt, dieselbe erfüllen. Doch hat Euler darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn nur ein einziges rationales Zahlenpaar bekannt ist, das, für x und y in (3) eingesetzt, (3) erfüllt, sich unzählig viele solche Wertepaare finden lassen. Man erkennt dies, wenn man bedenkt, daß, wenn eine Gleichung zweiten Grades für x eine rationale Wurzel x_1 hat, auch ihre zweite Wurzel x_2 rational sein muß und sich leicht berechnen läßt. So kann man durch (3) aus dem von irgend woher bekannten Zahlenpaare x_1 und y_1 ein zweites x_2 und y_1 finden, und, indem man nun die Gleichung (3) als quadratische Gleichung für y betrachtet, findet man dann weiter nach x_2, y_1 auf dieselbe Weise eine Zahl y_2, welche mit x_2 zusammen die Gleichung (3) erfüllt usw. Diese Eulersche Methode, um aus einem als bekannt vorausgesetzten Wertepaare weitere Wertepaare zu finden, welche eine gegebene Gleichung zweiten Grades zwischen x und y erfüllen, befriedigt den Mathematiker aus zwei Gründen nicht, erstens, weil sie nicht angibt, wie man das erste als bekannt vorausgesetzte Wertepaar anders als durch Raten finden kann, zweitens, weil es häufig vorkommt, daß die Eulersche Methode nach einer Reihe von gefundenen Wertepaaren wieder auf das Paar, von dem man ausging oder überhaupt auf ein früheres zurüc [illegible] dann nur eine

endliche Anzahl von Wertepaaren statt der erwarteten unzählig vielen Wertepaare gefunden werden konnte. Wir verwerfen daher hier die Eulersche Methode und suchen unsere Gleichungen auf direckte Weise rational zu lösen, indem wir jeden der in den Gleichungen vorkommenden Buchstaben durch einen neuen Buchstaben rational ausdrücken. Denn die Gleichungen (1) und (2) sind ja keine allgemeinen Gleichungen zweiten Grades zwischen x und y, sondern von solcher besonderen Art, daß ihre rationale Lösung gelingt. Dafür, daß nicht jeder Ausgangspunkt und jeder Weg zum Ziele führen muß, diene das folgende Beispiel.

Es liegt nahe, die Gleichung (1) des § 2 als Ausgangspunkt zu nehmen, b und c als bekannt, a und α als gesucht zu betrachten, und (1) in folgender Weise zu schreiben:

$$\alpha^2 = \frac{a^2(bc+1)^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2(bc-1)^2}. \tag{4}$$

Da b und c nur in der Form $b+c$, $b-c$, $bc+1$ und $bc-1$ vorkommen, so wird man $b+c$ mit s und $b-c$ mit d bezeichnen. Dann ist $4bc = s^2 - d^2$ und deshalb:

$$bc + 1 = \tfrac{1}{4}(s^2 - d^2 + 4)$$
$$bc - 1 = \tfrac{1}{4}(s^2 - d^2 - 4).$$

Hierdurch erhalten wir aus (4):

$$\alpha^2 s^2 - a^2\left(\frac{s^2-d^2+4}{4}\right)^2 = a^2\alpha^2\left(\frac{s^2-d^2-4}{4}\right)^2 - d^2. \tag{5}$$

Wir zerlegen nun die rechts und links stehende Differenz der Quadrate in Summe mal Differenz und erhalten dadurch:

$$(6) \quad \frac{4\alpha s + a(s^2 - d^2 + 4)}{a\alpha(s^2 - d^2 - 4) + 4d} = \frac{a\alpha(s^2 - d^2 - 4) - 4d}{4\alpha s - a(s^2 - d^2 + 4)}.$$

Indem wir nun jede der beiden Seiten der Gleichung (6) mit v bezeichnen und dann $\frac{a}{4}$ aus beiden Seiten ausdrücken, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{a}{4} = \dfrac{\alpha s - dv}{v\alpha(s^2 - d^2 - 4) + (s^2 - d^2 + 4)} \\ \dfrac{a}{4} = \dfrac{\alpha s v + d}{\alpha(s^2 - d^2 - 4) - (s^2 - d^2 + 4)v}. \end{cases}$$

Indem wir nun die beiden durch (7) für $\frac{a}{4}$ erhaltenen Brüche einander gleichsetzen, erhalten wir eine quadratische Gleichung für α, welche die als gegeben zu betrachtenden Größen s und d, sowie die Größe v enthält, die willkürlich ist oder über die wir noch verfügen können. Diese quadratische Gleichung für α lautet:

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha \cdot \dfrac{v}{v^2 - 1} \cdot \dfrac{s(s^2 - d^2 + 4) - d(s^2 - d^2 - 4)}{s(s^2 - d^2 - 4)} \\ \quad + \dfrac{d(s^2 - d^2 + 4)}{s(s^2 - d^2 - 4)} = 0. \end{cases}$$

Es gelingt nun nicht, bei gegebenem s und d über v so zu verfügen, daß diese quadratische Gleichung

rational lösbar wird, außer in trivialen Fällen, die wir ausschließen, wie z. B. $d = 0$, d. h. $b = c$.

Nun muß man aber daraus, daß der verfolgte Weg nicht zum Ziele führt, nicht etwa schließen, daß es nicht gelingt, b, c, α, a rational auszudrücken, es gelingt vielmehr auf einem weniger symmetrischen und weniger naheliegenden Wege, wie § 6 zeigt.

Daß es überhaupt gelingt, eine Gleichung rational zu lösen, die für x, für y und auch für $x = y$ zweiten Grades ist, zeigt folgendes Beispiel.

Es soll x und y bei gegebenem m rational durch p ausgedrückt werden, wenn

$$x^2 + xy + y^2 = m^2 \tag{9}$$

ist. Aus (9) erhält man:

$$x(x + y) = (m + y)(m - y). \tag{10}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x}{m + y} = \frac{m - y}{x + y}. \tag{11}$$

Indem man nun jede der beiden Seiten dieser Gleichung p nennt, erhält man:

$$x = p(m + y) \quad \text{und} \quad m - y = p(x + y),$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$y = m \cdot \frac{1 - p^2}{1 + p + p^2} \quad \text{und} \quad x = m \cdot \frac{2p + p^2}{1 + p + p^2}. \tag{12}$$

Jede hier für p gesetzte rationale Zahl ergibt nun eine rationale Lösung der vorgelegten Gleichung (9). Beispielsweise folgt für $m = 1$, $p = \frac{1}{2}$:

$$x = \tfrac{5}{7} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{3}{7},$$

so daß $x = 3$, $y = 5$, $m = 7$ ein ganzzahliges Tripel ist, welches die Gleichung (9) löst, wenn man x, y, m als Unbekannte betrachtet, und es darauf ankommt, drei ganze Zahlen zu finden, welche die Gleichung (9) erfüllen.

§ 4. Erste Herstellung rechtwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke.

Bei einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck liegt es wohl am nächsten, das sphärische Analogon des pythagoreischen Lehrsatzes, d. h. die Formel:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

zu benutzen, um zu heronischen Lösungen zu gelangen, d. h. zu solchen Seiten und Winkeln, daß deren Sinus und Kosinus zugleich rational werden. Schon in § 2 ist sowohl aus der soeben genannten Formel als auch aus der Formel, welche beim schiefwinkligen Dreieck $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ ausdrückt, diejenige Formel abgeleitet, welche beim rechtwinkligen Dreieck $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ miteinander verbindet. Wenn wir wieder für $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ kurz a, für $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ kurz b, für $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ kurz c schreiben, so lautet die in § 2 bewiesene Formel, welche a, b, c miteinander verküpft:

$$(1) \qquad a^2 = \frac{b^2 + c^2}{1 + b^2 c^2}.$$

Durch § 2 ist das Problem der Herstellung rechtwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke darauf zurückgeführt, rationale Lösungen der Gleichung (1) zu finden. Schon im ersten Abschnitt von Band II dieser Auslese ist gezeigt, daß, wenn man für die drei Seiten eines ebenen Dreiecks $2g$, $1-g^2$, $1+g^2$, wo g rational ist, einsetzt, man erreicht, daß das Dreieck rechtwinklig wird, d. h. daß das Quadrat einer Seite gleich der Quadratsumme der beiden anderen wird. Demgemäß setzen wir in (1) ein:

(2) $b \cdot v = 2g, \quad c \cdot v = 1 - g^2, \quad v = 2f, \quad bcv = 1 - f^2.$

Das Multiplizieren mit dem noch unbestimmten, aber als rational vorausgesetzten Faktor v geschah, um möglichst allgemein bleiben zu können. Hiernach wird:

$$a^2 = \frac{(1+g^2)^2}{(1+f^2)^2} \quad \text{oder} \quad a = \frac{1+g^2}{1+f^2}.$$

Nun muß aber zwischen f und g eine Bedingungsgleichung bestehen, die man erhält, wenn man bei (2) beachtet, daß das Produkt von $b \cdot v$ und $c \cdot v$ gleich dem Produkte von v mit $b \cdot c \cdot v$ ist. Dann erhält man:

$$2g(1-g^2) = 2f(1-f^2)$$

oder:

(3) $$f^3 - g^3 = f - g.$$

Aus (3) folgt, daß entweder $f = g$ ist, oder daß

(4) $$f^2 + fg + g^2 = 1$$

ist. Nun kann aber f nicht gleich g sein, wenn wir triviale Fälle ausschließen, da dann $a = 1$ sein müßte,

d. h. die Hypotenuse des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks 90 Grad wäre. Also muß die in (4) genannte Beziehung zwischen f und g bestehen. Diese aber ist schon in § 3 durch rationale Werte gelöst. Wir fanden dort durch die Gleichungen (9) bis (12) für $m = 1$:

$$(5) \qquad f = \frac{1 - p^2}{1 + p + p^2} \quad \text{und} \quad g = \frac{2p + p^2}{1 + p + p^2}$$

als die rationalen Lösungen unserer hier mit (4) bezeichneten Beziehung. Wenn wir nun die in (5) gefundenen Ausdrücke, in denen p jede rationale Zahl bedeutet, in (2) einsetzen, erhalten wir:

$$v = \frac{2(1 - p^2)}{1 + p + p^2}, \qquad b = \frac{4p + 2p^2}{1 + p + p^2} : \frac{2(1 - p^2)}{1 + p + p^2}$$

oder

$$b = \frac{2p + p^2}{1 - p^2}, \qquad c = \left[1 - \left(\frac{2p + p^2}{1 + p + p^2}\right)^2\right] : \frac{2(1 - p)^2}{1 + p + p^2}$$

oder

$$c = \frac{(1 + 3p + 2p^2)(1 - p)}{2(1 + p + p^2)(1 - p)(1 + p)} = \frac{1 + 2p}{2(1 + p + p^2)}.$$

Endlich erhalten wir aus $a = \frac{1 + g^2}{1 + f^2}$:

$$a = \frac{1 + 2p + 7p^2 + 6p^3 + 2p^4}{2 + 2p + p^2 + 2p^3 + 2p^4}.$$

Die Einsetzung jeder positiven oder negativen rationalen Zahl für p in die für a, b, c gefundenen Ausdrücke muß nun die drei Seiten eines rechtwinkligen heronischen Dreiecks ergeben. Die Winkel β

und γ findet man dann durch die in § 2 bewiesenen Formeln

$$(6) \qquad \beta = \frac{s-a}{s-b}, \quad \gamma = \frac{s-a}{s-c},$$

wo $2s = abc + a + b + c$ ist.

Ehe wir zu Zahlenbeispielen übergehen, bemerken wir noch, daß jede aus den Ausdrücken für a, b, c, nämlich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{c} a = \dfrac{1 + 2p + 7p^2 + 6p^3 + 2p^4}{2 + 2p + p^2 + 2p^3 + 2p^4} \\ b = \dfrac{2p + p^2}{1 - p^2} \quad \text{und} \quad c = \dfrac{1 + 2p}{2 + 2p + 2p^2} \end{array} \right\},$$

resultierende negative Zahl in die entsprechende positive verwandelt werden kann, weil die zu erfüllende Gleichung (1) nur die Quadrate von a, b, c enthält.

Dieses ist bei den folgenden fünf Beispielen beachtet, in denen a, b, c, β, γ stets positiv geschrieben ist, und die aus (7) und (6) durch Einsetzung von positiven oder negativen, aber rationalen Werten für p hervorgehen.

1. $p = \frac{1}{4}$ ergibt: $a = \frac{29}{37}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{4}{7}$, $\beta = \frac{25}{39}$, $\gamma = \frac{17}{28}$;
2. $p = -\frac{1}{3}$ ergibt: $a = \frac{74}{113}$, $b = \frac{5}{8}$, $c = \frac{3}{14}$, $\beta = \frac{41}{50}$, $\gamma = \frac{21}{89}$;
3. $p = +2$ ergibt: $a = \frac{113}{58}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = \frac{5}{14}$, $\beta = \frac{51}{26}$, $\gamma = \frac{35}{73}$;

4. $p = +\frac{1}{2}$ ergibt: $a = \frac{37}{29}$, $b = \frac{5}{3}$, $c = \frac{4}{7}$, $\beta = \frac{39}{25}$,
$\gamma = \frac{17}{28}$;

5. $p = -\frac{3}{2}$ ergibt: $a = \frac{29}{37}$, $b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{4}{7}$, $\beta = \frac{25}{39}$,
$\gamma = \frac{17}{28}$.

Man erkennt, daß die Beispiele 1., 4., 5., obwohl aus Werten von p hervorgehend, die keinen Zusammenhang zeigen, unter sich einen auffallenden Zusammenhang offenbaren. Über solche Zusammenhänge und die Möglichkeit, aus einer auf ein heronisches Dreieck bezüglichen rationalen Wertgruppe beliebig viele neue Wertgruppen abzuleiten, wird § 8 ausführlich handeln.

Bei numerischen Ausrechnungen, wie sie die obigen fünf Beispiele $p = \frac{1}{4}$, $p = -\frac{1}{8}$, $p = +2$, $p = +\frac{1}{2}$, $p = -\frac{3}{2}$ ergaben, benutzt man am besten die Formeln (7), um die drei Seiten zu finden, dann, um β und γ zu finden, die beiden Formeln, die der in § 2 mit (1) bezeichneten analog sind, endlich die Formeln (9) des § 2 zur Kontrolle.

§ 5. Zweite Herstellung rechtwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke.

Die in § 4 geleistete Herstellung rechtwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke beruhte auf der Relation, die zwischen der Hypotenuse und den

15*

beiden Katheten eines solchen Dreiecks besteht, d. h. auf der Relation:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}},$$

oder, was dasselbe ist, auf der Relation:

$$(2) \qquad \cos a = \cos b \cdot \cos c .$$

Es war also das Produkt der Kosinusse zweier heronischer Winkel wieder als Kosinus eines heronischen Winkels darzustellen. Man kann jedoch auch von der Relation ausgehen, die zwischen der Hypotenuse, einer Kathete und dem dieser Kathete gegenüberliegenden Winkel besteht, also zwischen a, b und β. Nach dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie läßt sich diese Relation so schreiben:

$$(3) \qquad \sin b = \sin a \cdot \sin \beta .$$

Hier erscheint nun das Produkt der Sinusse zweier heronischer Winkel als Sinus eines heronischen Winkels. Man kann deshalb die auf Formel (3) beruhende Herstellung heronischer sphärischer Dreiecke auf die in § 4 geleistete auf Formel (2) beruhende Herstellung dadurch zurückführen, daß man $a = 90^0 - a'$, $b = 90^0 - b'$, $c = 90^0 - c'$ setzt, und dann $a' = b$, $b' = a$, $c' = \beta$ setzt. Da wir nun aber, wegen unserer in § 2 eingeführten kurzen Schreibweise

$$\operatorname{tg} \frac{a'}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{b'}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{c'}{2}$$

einzuführen haben, so ist

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} \text{ durch } \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{a'}{2}\right), \quad \mathrm{tg}\frac{b}{2} \text{ durch } \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{b'}{2}\right),$$
$$\mathrm{tg}\frac{c}{2} \quad \text{durch} \quad \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{c'}{2}\right)$$

zu ersetzen, oder, wegen der Abkürzung:

$$a = \frac{1 - a'}{1 + a'}, \quad b = \frac{1 - b'}{1 + b'}, \quad c = \frac{1 - c'}{1 + c'}$$

zu setzen. Natürlich hat man auch umgekehrt:

$$a' = \frac{1 - a}{1 + a}, \quad b' = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad c' = \frac{1 - c}{1 + c}.$$

Führt man dies in die drei Formeln ein, die in § 4 durch (7) bezeichnet sind und die a, b, c durch p ausdrücken, so erhält man:

$$a' \text{ oder } b = \frac{1 - 6p^2 - 4p^3}{3 + 4p + 8p^2 + 8p^3 + 4p^4},$$
$$b' \text{ oder } a = \frac{1 - 2p - 2p^2}{1 + 2p},$$
$$c' \text{ oder } \beta = \frac{1 + 2p^2}{3 + 4p + 2p^2}.$$

Nachdem wir noch Zähler und Nenner des für b erhaltenen Quotienten in Faktoren zerspalten haben, bekommen wir b, a, β in folgender Gestalt durch p ausgedrückt:

$$(4)\begin{cases} b = \dfrac{(1 + 2p)(1 - 2p - 2p^2)}{(1 + 2p^2)(3 + 4p + 2p^2)}, \\ a = \dfrac{1 - 2p - 2p^2}{1 + 2p}, \quad \beta = \dfrac{1 + 2p^2}{3 + 4p + 2p^2}. \end{cases}$$

Um nun auch noch c und γ durch p auszudrücken, benutzen wir die schon in § 2 erwähnten, aus den Napierschen Analogien folgenden Formeln, indem wir $\alpha = \operatorname{tg} 45^0$ durch die Zahl 1 ersetzen, also die Formeln:

$$c = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{a-b}{1+ab} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{a-b}{a+b}.$$

Zunächst ergibt sich:

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{2(1+p+p^2)}{1+2p}$$

und

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1+2p^2+4p^3+2p^4}{2(1+p+p^2)^2}.$$

Für $a-b$ erhält man:

$$a-b = \frac{(1-2p-2p^2)(2+4p^2+8p^3+4p^4)}{(1+2p)(1+2p^2)(3+4p+2p^2)},$$

ferner für $1+ab$:

$$1+ab = \frac{4+8p^2+16p^3+8p^4}{(1+2p^2)(3+4p+2p^2)}.$$

So erhält man zunächst:

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{(1-2p-2p^2)\cdot 2\cdot(1+2p^2+4p^3+2p^4)}{(1+2p)\cdot 4\cdot(1+2p^2+4p^3+2p^4)}$$

oder:

$$\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1-2p-2p^2}{2(1+2p)},$$

also durch Einsetzen:

$$(5)\quad \begin{cases} c = \dfrac{(1-2p-2p^2)(1+p+p^2)}{(1+2p)^2}; \\[2ex] \gamma = \dfrac{1+2p^2+4p^3+2p^4}{(1+2p)(1+p+p^2)}. \end{cases}$$

Somit ist unser Ziel, a, b, c, β, γ bei einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck durch einen und denselben Buchstaben rational auszudrücken, erreicht, und dadurch auch unzählig viele rechtwinklige sphärische Dreiecke hergestellt, in denen alle Seiten und alle Winkel heronisch sind, d. h. sowohl ihren Sinus wie auch ihren Kosinus rational haben.

Als Beispiel wählen wir $p = \frac{1}{2}$. Dadurch erhält man:

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{4}{33}, \quad c = \tfrac{7}{32}, \quad \beta = \tfrac{3}{11}, \quad \gamma = \tfrac{17}{28}.$$

Wie in § 4 konnte jeder negative Wert, der sich ergab, in den entsprechenden positiven verwandelt werden. Aus diesen Werten folgt für die Sinusse:

$$\sin a = \tfrac{8}{17}, \quad \sin b = \tfrac{264}{1105}, \quad \sin c = \tfrac{448}{1073},$$
$$\sin \alpha = 1, \quad \sin \beta = \tfrac{33}{65}, \quad \sin \gamma = \tfrac{952}{1073}.$$

Wenn wir zweitens $p = \frac{1}{3}$ setzen, erhalten wir:

$$a = \tfrac{1}{15}, \quad b = \tfrac{15}{451}, \quad c = \tfrac{13}{225}, \quad \beta = \tfrac{11}{41}, \quad \gamma = \tfrac{113}{195}.$$

§ 6. Erste Herstellung schiefwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke.

Die Sinusformel der sphärischen Trigonometrie erhält, wenn man die eingeführte Abkürzung, wonach b statt $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, c statt $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, β statt $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, γ statt $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ geschrieben wird, beachtet, die folgende Form:

$$(1) \qquad \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \cdot \frac{2b}{1+b^2} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \cdot \frac{2c}{1+c^2}.$$

Die Gleichung (1) enthält vier Variable γ, b, β, c, und ist für jede derselben vom zweiten Grade. Man kann daher das Problem stellen, zwei von den vier Variabeln als bekannt, zwei als unbekannt ansehend, diese letzteren durch die beiden ersteren rational auszudrücken. Nach § 3 gelingt es ja in manchen Fällen, bei einer Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Unbekannten x und y, diese durch einen und denselben Buchstaben rational auszudrücken, so daß jeder rationale Wert, den man für diesen Buchstaben setzt, ein Wertepaar für x und y hervorruft, das die Gleichung erfüllt. In § 3 war beispielsweise die Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 = m^2$$

auf diese Weise rational gelöst. Eine solche Lösung der Gleichung (1), bei der etwa jede der Unbekannten b und c durch β und γ rational ausgedrückt werden, erscheint nun unmöglich. Man ist vielmehr auf das auch im § 3 erwähnte Eulersche Verfahren angewiesen, indem man aus zwei Werten von b und c, die als gefunden betrachtet werden, unzählig viele Wertepaare nacheinander gewinnt. Wohl aber gelingt es, die Gleichung so zu lösen, daß entweder jede der vier Größen b, c, β, γ durch eine fünfte rational ausgedrückt erscheint, oder, daß drei derselben, etwa b, c, γ, durch die vierte, also β, rational ausgedrückt wird. Für eine spätere Anwendung unserer Methode der Herstellung heronischer sphärischer Dreiecke auf

das Problem, Polyeder zu finden, bei denen alle Kanten, alle Begrenzungsflächen uud auch das Volumen ganzzahlig werden, ist die zuzweit erwähnte Lösung, bei der eine der vier Größen eine beliebig gegebene rationale Zahl ist, brauchbarer, als die erste. Indem wir die zweite Lösung in § 7 zu behandeln vorhaben, beschränken wir uns hier zunächst darauf, die Gleichung (1) so zu lösen, daß jede der vier Größen b, c, β, γ durch eine fünfte rational ausgedrückt wird.

Da jeder der beiden in (1) gleichgesetzten Ausdrücke im Nenner das Produkt zweier Quadratsummen zeigt, so liegt es nahe, den auch in der Zahlentheorie verwendbaren Umstand zu benutzen, daß das Produkt zweier Quadratsummen auf zweifache Weise als Quadratsumme dargestellt werden kann, oder daß

$$(2) \qquad (1+p^2)(1+q^2) = \begin{Bmatrix} (1+pq)^2 + (p-q)^2 \\ (1-pq)^2 + (p+q)^2 \end{Bmatrix}$$

ist, eine Identität der elementaren Arithmetik. Wenn wir jedoch die Identität (2) ohne weiteres auf (1) anwenden wollten, indem wir etwa erstens $\gamma b = \beta c \cdot v$, zweitens

$$(3) \begin{Bmatrix} (1+\gamma b)^2 + (\gamma - b)^2 \\ (1-\gamma b)^2 + (\gamma + b)^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1+\beta c)^2 \cdot v + (\beta - c)^2 \cdot v \\ (1-\beta c)^2 \cdot v + (\beta + c)^2 \cdot v \end{Bmatrix}$$

setzen, so würden wir nur zu trivialen Lösungen, wie etwa $\gamma = \beta$, $c = b$ und dgl., gelangen. Wohl aber können wir den Umstand benutzen, daß in (1) links

und rechts im Zähler dieselben Buchstaben als Faktoren auftreten, die links und rechts im Nenner als Quadratbasen auftreten, indem wir einerseits setzen:

$$\gamma = x\,, \qquad b = \frac{fz}{y}\,,$$

andererseits:

$$\beta = z\,, \qquad c = \frac{fy}{x}\,.$$

Dadurch erhält man, weil

$$x \cdot (fz \cdot y) = z \cdot (fy \cdot x)$$

ist, die folgende Gleichung:

$$(4) \quad (1 + x^2)(y^2 + f^2 z^2) = (1 + z^2)(x^2 + f^2 y^2)\,.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die Gleichung (4) rational zu lösen, d. h. x, y und z rational durch f auszudrücken. Dies zu bewerkstelligen, benutzen wir die oben erwähnten Identitäten über das Produkt zweier Quadratsummen, indem wir (4) verwandeln in:

$$(5) \; (y + fxz)^2 + (xy - fz)^2 = (fyz - x)^2 + (fy + xz)^2.$$

Die Gleichung (5) wird unter anderem durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems erfüllt:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y + fxz = fyz - x \\ xy - fz = fy + xz \end{array} \right\}.$$

Die zweite Gleichung dieses Systems, in der x bevorzugt erscheint, gestattet es, y und z einzeln linear durch x und eine neue Größe v auszudrücken. Man kann sie nämlich so schreiben:

$$(7) \qquad y(x - f) = z(x + f)\,,$$

woraus folgt:

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = (x + f)v \\ z = (x - f)v \end{array}\right\}.$$

Setzt man diese Ausdrücke für y und z in die erste Gleichung des Systems (6) ein, so erhält man:

$$(9)\quad (x + f)v + fx(x - f)v = f(x^2 - f^2)v^2 - x .$$

Damit sich nun x durch f rational ausdrücken lasse, wollen wir über die eingeführte und noch unbestimmte Größe v so verfügen, daß der Koeffizient von x^2 verschwinde. Dies geschieht, wenn $fv = fv^2$ ist, und, da $f = 0$ und $v = 0$ auf triviale Fälle führt, wenn $v = 1$ ist. Dann wird aber aus (9):

$$x + f - f^2 x = -f^3 - x$$

oder:

$$(10)\qquad x = \frac{f(f^2 + 1)}{f^2 - 2}.$$

Hieraus folgt dann durch Einsetzen in (8):

$$y = \frac{f(2f^2 - 1)}{f^2 - 2} \quad \text{und} \quad z = \frac{3f}{f^2 - 2},$$

woraus durch weiteres Einsetzen folgt:

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \gamma = \dfrac{f(f^2 + 1)}{f^2 - 2}, & b = \dfrac{3f}{2f^2 - 1}, \\ \beta = \dfrac{3f}{f^2 - 2}, & c = \dfrac{f(2f^2 - 1)}{f^2 + 1}. \end{array}\right.$$

Um nun auch α und a durch f rational auszudrücken, haben wir aus § 2 die Formeln (4) und (5) zu benutzen. Dadurch erhalten wir:

$$(12) \qquad \alpha = \frac{4f^2+1}{f(f^2-2)} \qquad \text{und} \qquad a = \frac{f(f^2+4)}{2f^2-1}.$$

Da die Sinusformel unser Ausgangspunkt bei der Herstellung der heronischen sphärischen Dreiecke war, so liegt es nahe, auch $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ durch f auszudrücken. Wir erhalten:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin a &= \frac{2f(f^2+4)(2f^2-1)}{(f^2+1)(f^4+11f^2+1)}, \\ \sin \alpha &= \frac{2f(f^2-2)(4f^2+1)}{(f^2+1)(f^4+11f^2+1)}; \\ \sin b &= \frac{6f(2f^2-1)}{(f^2+1)(4f^2+1)}; \\ \sin \beta &= \frac{6f(f^2-2)}{(f^2+1)(f^2+4)}; \\ \sin c &= \frac{2f(f^2+1)(2f^2-1)}{(4f^2+1)(f^4-f^2+1)}; \\ \sin \gamma &= \frac{2f(f^2+1)(f^2-2)}{(f^2+4)(f^4-f^2+1)}. \end{aligned} \right.$$

Die Sinusformel liefert nunmehr eine schöne Bestätigung. Denn es ist:

$$(14) \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{(f^2+4)(2f^2-1)}{(f^2-2)(4f^2+1)}.$$

Als Beispiel wählen wir $f = 2$. Dadurch erhalten wir aus (11) und (12):

(15) $a = \frac{16}{7}$, $b = \frac{6}{7}$, $c = \frac{14}{5}$, $\alpha = \frac{17}{4}$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

Nachdem wir so $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ für $f = 2$ berechnet haben, berechnen wir auch die Sinusse für $f = 2$, und zwar aus (13). Es ergibt sich:

$$(16) \begin{cases} \sin a = \frac{224}{305}, & \sin b = \frac{84}{85}, & \sin c = \frac{140}{221}; \\ \sin \alpha = \frac{136}{305}, & \sin \beta = \frac{8}{5}, & \sin \gamma = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

Jede der soeben gefundenen ∞^1 Lösungen des Problems, heronische sphärische Dreiecke herzustellen, kann nun als Ausgangspunkt für das in § 3 geschilderte Eulersche Verfahren dienen. Um dies zu zeigen, eliminieren wir aus (6) nicht wie oben y und z, sondern x und z, wodurch eine Gleichung zweiten Grades zwischen f und z entsteht. Dadurch erhalten wir aus der ersten Gleichung des Systems (6):

$$y(fz - 1) = x(fz + 1)$$

oder:

$$\begin{Bmatrix} x = (fz - 1)v \\ y = (fz + 1)v \end{Bmatrix}.$$

Der Einfachheit wegen nehmen wir $v = 1$ und erhalten durch Einsetzen in die zweite Gleichung des

Systems (6) die nur zwischen f und x bestehende Gleichung:

$$(17) \qquad x^2 - x \cdot \frac{f^2 + f - 1}{f(f-1)} - \frac{f+1}{f(f-1)} = 0 .$$

Diese Gleichung ist so geschrieben, als wenn x unbekannt ist; schreiben wir sie so, als ob f unbekannt ist, so erhalten wir:

$$(18) \qquad f^2 - f \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} = 0 .$$

Nun wissen wir aus dem obigen Verfahren, das uns x rational durch f ausdrücken ließ, daß das Wertepaar $f = 2$, $x = 3$ die Gleichungen (17) und (18) erfüllt. Bezeichnen wir also die beiden Wurzeln von (18) mit f_1 und f_2, so erhalten wir:

$$f_1 \cdot f_2 = + \frac{1}{x} \qquad \text{oder} \qquad f_2 = \frac{1}{x_1 f_1} = \frac{1}{6},$$

wo die Ausgangswerte x_1 und f_1 genannt sind. Aus $f_2 = \frac{1}{6}$ folgt nun durch (17):

$$x_2 = \frac{-(f_2 + 1)}{f_2(f_2 - 1)} : x_1 = \frac{42}{5} : 3 = \frac{14}{5} .$$

Dann folgt weiter:

$$f_2 f_3 = \tfrac{5}{14}, \quad f_3 = \tfrac{15}{7}, \quad x_3 = -\tfrac{11}{24} .$$

So entstehen aus dem heronischen Dreieck, in welchem $b = \frac{6}{7}$, $c = \frac{14}{5}$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, also $x = 3$, $f = 2$ ist, unzählig viele andere, nämlich:

$$\beta_1 = 3, \quad c_1 = \tfrac{14}{5},$$
$$\beta_2 = \tfrac{14}{5}, \quad c_2 = \tfrac{11}{24},$$
$$\beta_3 = \tfrac{11}{24}, \quad c_3 = \tfrac{5}{259} .$$

. . . .

Dies ergibt für die Sinusse eine Reihe von ∞^1 Lösungen, die so beginnt:

$\sin \beta_1 = \frac{3}{5}$, $\sin c_1 = \frac{140}{222}$, $\sin \gamma_1 = \frac{5}{13}$, $\sin b_1 = \frac{84}{85}$;
$\sin \beta_2 = \frac{140}{221}$, $\sin c_2 = \frac{528}{697}$, $\sin \gamma_2 = \frac{240}{289}$, $\sin b_2 = \frac{308}{533}$;
$\sin \beta_3 = \frac{528}{697}$, $\sin c_3 = \frac{1295}{33553}$, $\sin \gamma_3 = \frac{12432}{15457}$, $\sin b_3 = \frac{55}{1513}$.
. . . .

§ 7. **Zweite Herstellung schiefwinkliger heronischer sphärischer Dreiecke, eins von den sechs Stücken ist beliebig gegeben.**

In § 6 war eine Methode gefunden, um jedes von den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks durch ein siebentes rational auszudrücken; hier soll eins derselben, wir wählen β, als beliebig gegeben betrachtet werden. Wenn wir dann γ, b und c durch β rational ausgedrückt haben, können wir nach § 2 auch a und α durch β rational ausdrücken. Wie in § 6 gehen wir von der Beziehung aus, die $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ miteinander verknüpft, und die, wenn wir wieder für die soeben genannten Zahlen kurz β, c, γ, b sagen, folgendermaßen lautet:

$$(1) \qquad \frac{\beta \cdot c}{(1+\beta^2)(1+c^2)} = \frac{\gamma \cdot b}{(1+\gamma^2)(1+b^2)}.$$

Wir setzen $c = \frac{xy}{z}$, $\gamma = \beta z$, $b = \frac{x}{y}$, lassen aber

das als gegeben betrachtete β unverändert. Dadurch erhalten wir:

$$(2) \qquad \frac{\beta \cdot (x\,y\,z)}{(1+\beta^2)(z^2+x^2\,y^2)} = \frac{(\beta\,z)(x\,y)}{(1+\beta^2\,z^2)(x^2+y^2)},$$

so daß wir nur die Gleichung:

$$(3) \qquad (1+\beta^2)(z^2+x^2\,y^2) = (1+\beta^2\,z^2)(x^2+y^2)$$

zu erfüllen haben. Wie in § 6 stellen wir links und rechts das Produkt der Quadratsummen als Quadratsumme dar. So kommt:

$$(4) \qquad (z+\beta\,x\,y)^2+(x\,y-\beta\,z)^2=(\beta\,z\,x-y)^2+(\beta\,z\,y+x)^2.$$

Die uns gegebene Gleichung (1) ist also rational gelöst, wenn wir unter anderem das folgende Gleichungssystem rational lösen:

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} z+\beta\,x\,y=\beta\,z\,x-y \\ x\,y-\beta\,z=\beta\,z\,y+x \end{array}\right\}.$$

Aus der ersten Gleichung dieses Systems folgt:

$$(6) \qquad y\cdot(\beta\,x+1)=z\cdot(\beta\,x-1)\,.$$

Demnach können wir sowohl y als auch y und z durch β, x und einen Proportionalitätsfaktor, den wir v nennen, ausdrücken, nämlich:

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} z=(\beta\cdot x+1)\cdot v \\ y=(\beta\cdot x-1)\cdot v\,. \end{array}\right.$$

Durch Einsetzen dieser β, x, v enthaltenden Ausdrücke für z und für y in die zweite Gleichung des Systems (5) erhalten wir:

$$(8) \quad x(\beta\,x-1)\,v-\beta\,(\beta\,x+1)\,v=\beta\,(\beta^2\,x^2-1)\,v^2+x.$$

Es handelt sich jetzt darum, die Gleichung (8), die zweiten Grades für x ist, durch Verfügen über v zu einer Gleichung ersten Grades zu machen, damit x durch β rational ausdrückbar sei. Dieser Zweck kann auf zweierlei Weise am einfachsten erreicht werden, erstens dadurch, daß wir den Koeffizienten von x verschwinden lassen, zweitens dadurch, daß wir das von x freie Glied verschwinden lassen. Beide Wege führen zum Ziele. Wir wählen den ersten Weg. Wenn in (8) der Koeffizient von x verschwinden soll, muß sein:

$$\beta v = \beta^3 v^2$$

oder, da $v = 0$ auf triviale Lösungen führt,

$$v = \frac{1}{\beta^2}. \tag{9}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes von v wird aus (8) eine Gleichung ersten Grades für x, nämlich:

$$-\frac{x}{\beta^2} - x - \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\beta^3} + x$$

oder:

$$x = \frac{1 - \beta^2}{\beta(1 + 2\beta^2)}. \tag{10}$$

Aus (10) erhält man durch (7):

$$y = \frac{-3}{1 + 2\beta^2} \quad \text{und} \quad z = \frac{2 + \beta^2}{\beta^2(1 + 2\beta^2)}. \tag{11}$$

Nun hatten wir oben die Größen x, y, z eingeführt, indem wir $\gamma = \beta x$, $b = \frac{x}{y}$, $c = \frac{xy}{z}$ gesetzt

hatten. Setzen wir demgemäß die für x, y, z erhaltenen und β enthaltenden Ausdrücke ein, so erhalten wir, nachdem wir die Minuszeichen vor den Ausdrücken für b und für c fortgelassen haben, was wegen der Ausgangsgleichung (1) gestattet ist:

$$(12)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{2+\beta^2}{\beta(1+2\beta^2)}, \qquad b = \dfrac{1-\beta^2}{3\beta}, \\ c = \dfrac{3\beta(1-\beta^2)}{(1+2\beta^2)(2+\beta^2)}. \end{cases}$$

Eine Bestätigung der Berechnung erhält man durch die Sinusformel. Denn für $\dfrac{\sin b}{\sin\beta}$ und für $\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$ erhält man übereinstimmend:

$$\frac{3(1-\beta^4)}{1+7\beta^2+\beta^4}.$$

Die noch fehlende Seite a und den noch fehlenden Winkel α gewinnen wir wieder aus den in § 2 bewiesenen Formeln

$$a = \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}\cdot\frac{b-c}{1+bc} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1+\beta\gamma}{\beta-\gamma}.$$

Es ergibt sich, nachdem die entstehenden negativen Werte in die entsprechenden positiven verwandelt sind,

$$(13)\quad a = \frac{2(1-\beta^2)^2}{9\cdot\beta(1+\beta^2)} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{3\cdot\beta(1-\beta^2)}{2\cdot(1+7\beta^2+\beta^4)}.$$

Damit sind $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ durch $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ rational ausgedrückt und dadurch die Möglichkeit

gegeben, heronische sphärische Dreiecke auch dann herzustellen, wenn einer der drei Winkel als heronischer irgendwie gegeben ist.

Als Beispiel wählen wir den heronischen Winkel, dessen Sinus $\frac{12}{13}$, dessen Kosinus also $\frac{5}{13}$ ist. Der Tangens der Hälfte dieses Winkels, also β ist dann $\frac{2}{3}$. Dann erhalten wir aus den obigen Formeln (12) und (13):

$$\gamma = \frac{33}{17}, \quad c = \frac{45}{187}, \quad b = \frac{5}{18}, \quad a = \frac{25}{351}, \quad \alpha = \frac{45}{349}.$$

Diese Resultate werden durch die Sinusformel bestätigt. Denn es ist:

$$\sin\gamma = \frac{3 \cdot 11 \cdot 17}{13 \cdot 53}, \quad \sin c = \frac{45 \cdot 11 \cdot 17}{53 \cdot 349},$$

$$\sin b = \frac{180}{349}, \quad \sin a = \frac{25 \cdot 13 \cdot 27}{61913}, \quad \sin\alpha = \frac{45 \cdot 349}{61913}.$$

Wenn statt eines Winkels, wie oben, eine Seite gegeben ist, so gewinnt man die gesuchten Stücke durch polare Umformung der obigen Formeln oder durch Vertauschung von β mit c. Da auch beim rechtwinkligen Dreieck ein Winkel, nämlich der rechte, eine vorgeschriebene Größe hat, so müssen sich aus den obigen, β enthaltenden Ausdrücken für γ, c, b, a, c auch solche für das rechtwinklige Dreieck ergeben, wenn man β in α, γ in β, b in a, a in c, c in b verwandelt und dann α, d. h. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, d. h. 45^0, gleich 1 setzt.

§ 8. Herstellung unzählig vieler neuer heronischer sphärischer Dreiecke aus einem einzigen durch den reziproken Zusammenhang.

Da in der sphärischen Trigonometrie aus jeder richtigen Beziehung eine neue richtige Beziehung hervorgehen muß, wenn die Seiten in die Supplemente der Winkel und die Winkel in die Supplemente der Seiten übergehen, so muß auch, da

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180 - a) = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}$$

ist, aus jeder richtigen Wertgruppe $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, die sich auf die sechs Stücke eines heronischen sphärischen Dreiecks bezieht, eine neue richtige Wertgruppe $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ entstehen, wenn man

$$a_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad b_1 = \frac{1}{\beta}, \quad c_1 = \frac{1}{\gamma}$$

und zugleich:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a}, \quad \beta_1 = \frac{1}{b}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{c}$$

setzt. So geht beispielsweise aus der in § 6 mit Nr. 15 bezeichneten Wertgruppe:

(1) $a = \frac{16}{7}, \; b = \frac{6}{7}, \; c = \frac{14}{5}, \; \alpha = \frac{17}{4}, \; \beta = 3, \; \gamma = 5$

die folgende neue hervor:

(2) $a = \frac{4}{17}, \; b = \frac{1}{3}, \; c = \frac{1}{5}, \; \alpha = \frac{7}{16}, \; \beta = \frac{7}{6}, \; \gamma = \frac{5}{14}$.

Einen solchen Zusammenhang zweier Wertgruppen für die sechs Stücke eines sphärischen Dreiecks wollen

wir den polaren nennen, da es üblich ist, die oben geschilderte Verwandtschaft zweier sphärischer Dreiecke polar zu nennen.

Zu einem anderen Zusammenhang von Wertgruppen führt die Wahrheit, daß zwei Winkel, die sich zu 180 Grad ergänzen, denselben Sinus haben, in Verbindung mit dem Umstande, daß der in § 6 und § 7 befolgte Weg zur Herstellung richtiger rationaler Werte für die sechs Stücke eines heronischen Dreiecks lediglich auf der Sinusformel beruht. Da nämlich zwar $\sin(180 - a) = \sin a$ ist, aber

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(180 - a) = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}$$

ist, so muß jede in § 6 und § 7 aus der Sinusformel

$$\sin\gamma \cdot \sin b = \sin\beta \cdot \sin c$$

abgeleitete Wertgruppe für γ, b, β, c zu einer neuen führen, wenn man die dort für $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \operatorname{tg}\frac{b}{2}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{tg}\frac{c}{2}$ angewandten Zahlen γ, b, β, c sämtlich oder teilweise in ihre reziproken Werte verwandelt. Wenn man sie sämtlich in ihre reziproken Werte verwandelt, so wäre dies dasselbe, als ginge man von einem sphärischen Dreieck ABC zu dem A gegenüberliegenden Nebendreieck $A'BC$ über, das entsteht, wenn man auf der Kugelfläche AB über B hinaus, AC über C hinaus bis zum zweiten Schnittpunkte A' ver-

längert. Daß dann a und α in ihren Werten unverändert bleiben, folgt sowohl aus der Figur, als auch aus den in § 2 bewiesenen Formeln:

$$(3)\quad a = \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{1+\beta\gamma}{\beta-\gamma},$$

von denen jede in sich selbst übergeht, wenn man $\frac{1}{b}$ statt b, $\frac{1}{c}$ statt c, $\frac{1}{\beta}$ statt β, $\frac{1}{\gamma}$ statt γ setzt. Wenn man jedoch von den Werten für b, c, β, γ nur einen Teil in ihre reziproken Werte verwandelt, so kann zweierlei stattfinden, erstens a und α bleiben unverändert oder gehen in ihre reziproken Werte über, zweitens a und α erhalten völlig neue Werte, die weder mit den alten übereinstimmen noch auch ihre reziproken Werte sind. Dabei ist, wie früher, das Vorzeichen als gleichgültig anzusehen, so daß wir immer das etwa entstehende $-a$ in $+a$ verwandeln. Im ersten Falle nennen wir den Zusammenhang des neu entstehenden Dreiecks mit dem alten trivial, im zweiten Falle reziprok. Natürlich können auch statt b, c, β, γ andere zwei Seiten und ihre Gegenwinkel gewählt werden. Beispielsweise hängt mit der in § 6 unter Nr. 15, hier mit Nr. 1 bezeichneten Wertgruppe diejenige trivial zusammen, die entsteht, wenn man a, c, α, γ in ihre reziproken Werte verwandelt, also:

$$(4)\quad a = \tfrac{7}{16},\ b = \tfrac{6}{7},\ c = \tfrac{5}{14},\ \alpha = \tfrac{4}{17},\ \beta = 3,\ \gamma = \tfrac{1}{5}.$$

Wenn man nun bloß zwei Seiten oder bloß zwei Winkel in ihre reziproken Werte verwandelt, die dritte Seite bzw. den dritten Winkel unverändert läßt und darauf aus den nunmehr vorliegenden drei Seiten bzw. drei Winkeln die noch unbekannten Winkel bzw. Seiten berechnet, so wird man finden, daß immer der Gegenwinkel der dritten Seite bzw. die Gegenseite des dritten Winkels unverändert bleibt, aber die Werte der beiden anderen Winkel bzw. Seiten reziprok werden. Wenn man also etwa in der hier mit (1) bezeichneten Wertgruppe a unverändert läßt, b und c aber reziprok setzt, so werden β und γ auch reziprok, α aber bleibt unverändert; man erhält nämlich:

(5) $a=\frac{16}{7}$, $b=\frac{7}{6}$, $c=\frac{5}{14}$, $\alpha=\frac{17}{4}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{5}$.

Wenn man jedoch von den Werten für zwei Seiten und ihre Gegenwinkel drei unverändert läßt, aber für das vierte Stück den reziproken Wert setzt, oder, wenn man den Wert eines von solchen vier Stücken reziprok setzt, die Werte der drei anderen aber unverändert läßt, so wird man eine ganz neue Wertgruppe finden, die mit der alten nicht trivial zusammenhängt. Beispielsweise transformieren wir die oben mit (4) bezeichnete Wertgruppe, indem wir von b, β, c, γ die drei Stücke b, c, γ unverändert lassen, β aber reziprok setzen. Dadurch ergeben die Formeln (3) $a=\frac{49}{32}$, $\alpha=\frac{36}{17}$, so daß wir durch den reziproken Zusammenhang fast mühelos die neue Wertgruppe erhalten:

(6) $a=\frac{49}{32}$, $b=\frac{6}{7}$, $c=\frac{5}{14}$, $\alpha=\frac{36}{17}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=\frac{1}{5}$.

Zweitens wollen wir die mit (2) bezeichnete Wertgruppe dadurch in eine neue verwandeln, daß wir von den Werten für b, c, β, γ die von b, c, γ unverändert lassen, aber den Wert $\frac{7}{6}$ von β in seinen reziproken Wert $\frac{6}{7}$ verwandeln. Dadurch erhalten wir $a = \frac{17}{56}$, $\alpha = \frac{32}{49}$, also die neue Wertgruppe:

(7) $a = \frac{17}{56}\,,\ b = \frac{1}{3}\,,\ c = \frac{1}{5}\,,\ \alpha = \frac{32}{49}\,,\ \beta = \frac{6}{7}\,,\ \gamma = \frac{5}{14}\,.$

Von dieser Wertgruppe (7) ausgehend, wollen wir nun vermittels des reziproken Zusammenhangs erstens dadurch eine neue bilden, daß wir von b, c, β, γ nur b in den reziproken Wert verwandeln, b, β, γ aber unverändert lassen. Dadurch entsteht $a = \frac{17}{4}$, $\alpha = \frac{16}{7}$, also die Wertgruppe:

(8) $a = \frac{17}{4}\,,\ b = 3\,,\ c = \frac{1}{5}\,,\ \alpha = \frac{16}{7}\,,\ \beta = \frac{6}{7}\,,\ \gamma = \frac{5}{14}\,.$

Zweitens transformieren wir (7), indem wir b unverändert lassen, und bei c, β, γ die reziproken Werte nehmen. Dadurch kommt:

(9) $a = \frac{17}{4}\,,\ b = \frac{1}{3}\,,\ c = 5\,,\ \alpha = \frac{16}{7}\,,\ \beta = \frac{7}{6}\,,\ \gamma = \frac{14}{5}\,.$

Drittens transformieren wir (7), indem wir β unverändert lassen, und bei b, c, γ die Supplemente nehmen. Dadurch erhalten wir:

(10) $a = \frac{4}{17},\ b = 3\,,\ c = 5,\ \alpha = \frac{7}{16},\ \beta = \frac{6}{7},\ \gamma = \frac{14}{5}.$

Man erkennt, daß die drei aus der Wertgruppe (7) durch den reziproken Zusammenhang abgeleiteten Wertgruppen unter sich trivial zusammenhängen, indem bei (8) und (9) b, c, β, γ, bei (8) und (10) a, c, α, γ,

bei (9) und (10) a, b, α, β in ihre reziproken Werte verwandelt erscheinen.

Um aber erkennen zu lassen, daß man aus einer als richtig gefundenen Wertgruppe für ein heronisches sphärisches Dreieck drei völlig neue Wertgruppen ableiten kann, und zwar dadurch, daß man von den Werten für zwei Seiten und ihre Gegenwinkel drei unverändert läßt, das vierte aber in den reziproken Wert verwandelt, gehen wir wieder von der oben mit (7) bezeichneten Wertgruppe aus, und transformieren diese Wertgruppe auf dreifache Weise, um zu völlig neuen Dreiecken zu gelangen.

Erstens: es bleibe c, β, γ unverändert, b werde reziprok.
Zweitens: es bleibe c, α, γ unverändert, a werde reziprok.
Drittens: es bleibe a, α, β unverändert, b werde reziprok.

Je nachdem man eine dieser drei Transformationen an der mit (7) bezeichneten Wertgruppe vornimmt, erhält man die neuen Wertgruppen:

$$(11) \quad a = \tfrac{17}{4}, \; b = 3, \; c = \tfrac{1}{5}, \; \alpha = \tfrac{16}{7}, \; \beta = \tfrac{6}{7}, \; \gamma = \tfrac{5}{14};$$

$$(12) \quad \begin{cases} a = \tfrac{56}{17}, \; b = \tfrac{8679}{1368}, \; c = \tfrac{1}{5}, \; \alpha = \tfrac{32}{49}, \\ \qquad \beta = \tfrac{24722}{6699}, \; \gamma = \tfrac{5}{14}; \end{cases}$$

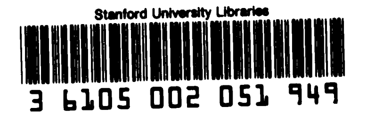
$$(13) \quad \begin{cases} a = \tfrac{17}{56}, \; b = 3, \; c = \tfrac{5587}{535}, \; \alpha = \tfrac{32}{49}, \\ \qquad \beta = \tfrac{6}{7}, \; \gamma = \tfrac{16157}{2596}. \end{cases}$$

Man beachte, daß diese Methode, um aus einer richtigen Wertgruppe neue Wertgruppen zu erzeugen, sehr wenig Berechnung nötig macht, indem man ja

bloß aus den bei dieser Transformation vorliegenden vier Stücken nach dem hier oben mit (3) bezeichneten Formelpaare zu rechnen hat, um die dritte Seite und den dritten Winkel zu bestimmen.

Der Einfachheit wegen haben wir oben bestimmte Zahlen gesetzt, um die soeben besprochene ergiebige Transformation deutlich vor Augen zu führen. Natürlich kann man die vorstehenden Betrachtungen auch ausführen, indem man die Formeln gebraucht, welche in § 6 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ durch f oder in § 7 a, b, c, α, γ durch β ausdrücken, und auf diese Weise statt neuer Wertgruppen neue Formeln gewinnen, indem jedem rationalen Werte von f bzw. β eine Wertgruppe zugehören muß. Doch verzichten wir auf die Herstellung neuer Lösungen unseres Problems durch solche Transformationen, indem es uns hier genügt, gezeigt zu haben, wie man, auch ohne die Eulersche Methode, die ja ein Raten voraussetzt, elementar zu unzählig vielen heronischen sphärischen Dreiecken gelangen kann. Überdies macht die Anwendung der Theorie solcher Dreiecke auf die Stereometrie doch noch besondere Untersuchungen erforderlich, weil jede Kante eines Polyeders die Scheitel zweier Ecken verbindet, und deshalb der Neigungswinkel der beiden Ebenen, die sich in dieser Kante schneiden, den beiden Ecken gemeinsam ist (vgl. § 1).




Stanford University Libraries
3 6105 002 051 949

